Questa funzione viene usata nello studio di circuiti elettrici per rappresentare l'insorgere istantaneo di corrente elettrica o di tensione, quando viene chiuso improvvisamente un interruttore.

(a) Disegnare il grafico della funzione di Heaviside.

(b) Disegnare il grafico della tensione $V(t)$ di un circuito nel quale un interruttore viene attivato all'istante $t = 0$ ed è immediatamente generata una tensione di 120 volt. Scrivere una formula che esprima $V(t)$ tramite $H(t)$.

(c) Disegnare il grafico della tensione $V(t)$ in un circuito dove l'interruttore viene attivato all'istante $t = 5$ secondi ed è applicata una tensione istantanea di 240 volt. Scrivere una formula per esprimere $V(t)$ tramite $H(t)$. (Si osservi che l'attivazione a 5 secondi corrisponde a una traslazione.)

54. La funzione di Heaviside (definita nell'Esercizio 53) può essere usata anche per definire la **funzione rampa** $y = ctH(t)$, che rappresenta un graduale aumento di tensione o di corrente in un circuito.

(a) Disegnare il grafico della rampa $y = tH(t)$.

(b) Disegnare il grafico della tensione $V(t)$ in un circuito dove l'interruttore viene attivato all'istante $t = 0$ e la tensione viene gradualmente aumentata fino a 120 volt in 60 secondi. Scrivere una formula per $V(t)$ tramite $H(t)$ per $t \leqslant 60$.

(c) Disegnare il grafico della tensione $V(t)$ in un circuito dove l'interruttore è attivato all'istante $t = 7$ e la tensione è gradatamente aumentata fino a 100 volt in 25 secondi. Scrivere una formula per $V(t)$, espressa tramite $H(t)$, per $t \leqslant 32$.

55. (a) Se $g(x) = 2x + 1$ e $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, trovare una funzione f tale che $f \circ g = h$. (Si pensi alle operazioni necessarie per trasformare la formula che definisce g nella formula che definisce h.)

(b) Se $f(x) = 3x + 5$ e $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, trovare una funzione g tale che $f \circ g = h$.

56. Se $f(x) = x + 4$ e $h(x) = 4x - 1$, trovare una funzione g tale che $g \circ f = h$.

57. Si supponga che g sia una funzione pari, e sia $h = f \circ g$. Allora h è sempre una funzione pari?

58. Si supponga che g sia una funzione dispari, e sia $h = f \circ g$. Allora h è sempre una funzione dispari? Cosa accade se f è dispari? E se f è pari?

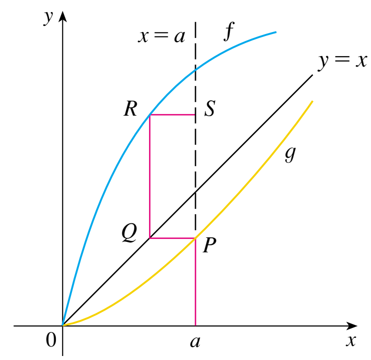
59. Siano dati i grafici di f e g come in figura; si vuole trovare il punto del grafico di $h = f \circ g$ corrispondente all'ascissa $x = a$. Si parte dal punto $(a,0)$ tracciando una linea verticale che incontra il grafico di g in P. Quindi si traccia una linea orizzontale da P verso Q, dove si incontra la retta $y = x$.

(a) Quali sono le coordinate di P e di Q?

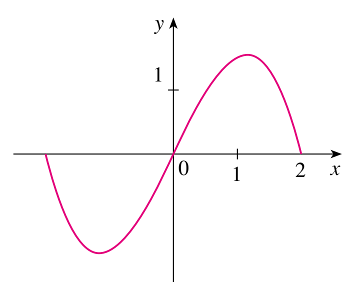
(b) Se ora si disegna una retta verticale in Q che interseca f in R, quali sono le coordinate di R?

(c) Se ora si disegna una linea orizzontale da R fino a S dove incontra la retta $x = a$, mostrare che S appartiene al grafico di h.

(d) Ripetendo la costruzione del reticolo $PQRS$ per diversi valori di a, disegnare il grafico di h.



60. Se f ha il grafico qui rappresentato, usare il metodo proposto nell'Esercizio 59 per disegnare il grafico di $f \circ f$. Usare la costruzione per $a = 0$, 0.5, 1, 1.5 e 2. Disegnare il grafico per $0 \leqslant x \leqslant 2$, quindi utilizzare il risultato dell'Esercizio 58 per completare il grafico.



1.4 Calcolatrici grafiche e computer

In questo paragrafo assumiamo che il lettore possa avere a disposizione una calcolatrice grafica o un computer con un software grafico. Vedremo che questi strumenti permettono di disegnare funzioni più complicate e di risolvere problemi più complessi di quanto sarebbe possibile fare altrimenti. Rileveremo inoltre alcune piccole insidie che l'uso di questi strumenti può celare.

Calcolatrici grafiche e computer possono dare grafici di funzioni con accuratezza molto elevata, ma scopriremo nel Capitolo 4 che solo con l'uso dei metodi del calcolo potremo essere certi di aver svelato ogni aspetto interessante in un grafico.

Una calcolatrice grafica o la schermata del software di un computer mostrano una porzione rettangolare del grafico di una funzione attraverso una visualizzazione su schermo in una opportuna finestra, alla quale ci riferiremo parlando di **schermata** (rettangolare) o **rettangolo di visualizzazione**. Spesso la prima immagine proposta dalla macchina è incompleta o fuorviante, perciò è importante scegliere con cura in quale spazio concentrare la visione. Se decidiamo di far variare le ascisse x da un valore minimo *Xmin* = a fino a un valore massimo *Xmax* = b e le ordinate y da un minimo *Ymin* = c a un massimo *Ymax* = d, di conseguenza viene visualizzata la parte di grafico che si trova nel rettangolo

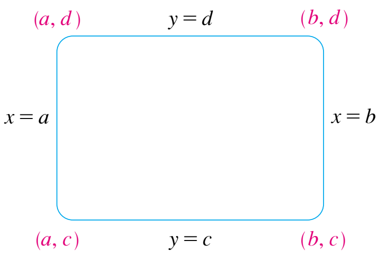


FIGURA 1
La schermata $[a, b]$ per $[c, d]$

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

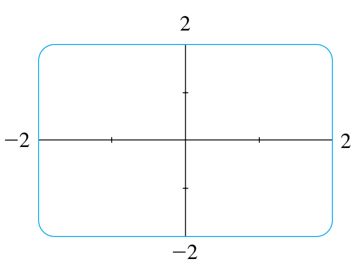
mostrato in Figura 1. Ci riferiamo dunque a questo rettangolo come alla *schermata* $[a, b]$ per $[c, d]$.

Lo strumento disegna il grafico della funzione f proprio come fareste voi. Disegna i punti $(x, f(x))$ per un certo numero di valori di x tra a e b. Se un certo valore di x non appartiene al dominio di f, o $f(x)$ giace fuori dalla schermata, salta al valore di x seguente. Infine, collega ogni punto con il disegno del precedente per formare una approssimazione del grafico di f.

ESEMPIO 1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^2 + 3$ in ciascuna delle seguenti schermate.

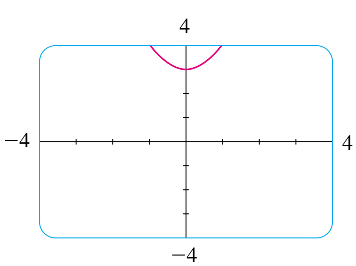
(a) $[-2, 2]$ per $[-2, 2]$
(b) $[-4, 4]$ per $[-4, 4]$
(c) $[-10, 10]$ per $[-5, 30]$
(d) $[-50, 50]$ per $[-100, 1000]$

SOLUZIONE Per la parte (a) selezioniamo $Xmin = -2$, $Xmax = 2$, $Ymin = -2$ e $Ymax = 2$. Il grafico risultante è in Figura 2(a). La finestra del display è vuota! Una breve riflessione fornisce una spiegazione: si osservi che $x^2 \geqslant 0$ per ogni x, perciò $x^2 + 3 \geqslant 3$ per ogni x e l'immagine della funzione $f(x) = x^2 + 3$ appartiene a $[3, +\infty)$. Ciò fa sì che il grafico di f giaccia per intero fuori dalla schermata $[-2, 2]$ per $[-2, 2]$.

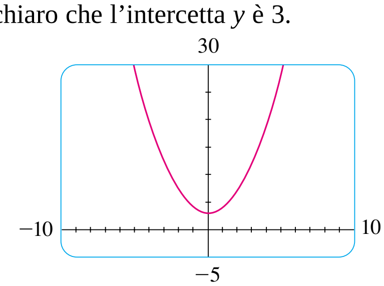


(a) $[-2, 2]$ per $[-2, 2]$

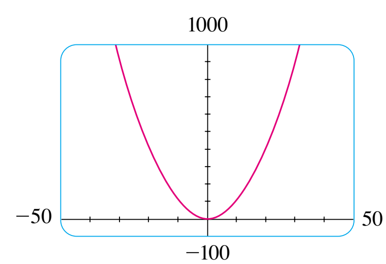
I grafici per le schermate delle domande (b), (c) e (d) sono disegnati in Figura 2. Si osservi che si ottengono figure più accurate in (b) e (c), ma non in (d), dove non è chiaro che l'intercetta y è 3.



(b) $[-4, 4]$ per $[-4, 4]$



(c) $[-10, 10]$ per $[-5, 30]$



(d) $[-50, 50]$ per $[-100, 1000]$

FIGURA 2 Grafici di $f(x) = x^2 + 3$

■

Ricaviamo dall'Esempio 1 che la scelta delle dimensioni e della centratura della schermata è essenziale nel definire la forma di un grafico. Talvolta è necessario passare a una schermata di dimensioni più ampie per avere un'immagine più completa, una visione più globale del grafico, ma pure schermate troppo larghe possono essere fuorvianti. Nel prossimo esempio vediamo come la conoscenza del dominio e dell'immagine fornisca una informazione sufficiente per selezionare una buona schermata.

ESEMPIO 2 Determinare una schermata appropriata per visualizzare la funzione $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ e usarla per disegnare il grafico di $f(x)$.

SOLUZIONE L'espressione assegnata per $f(x)$ è definita quando

$$8 - 2x^2 \geqslant 0 \iff 2x^2 \leqslant 8 \iff x^2 \leqslant 4$$
$$\iff |x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$$

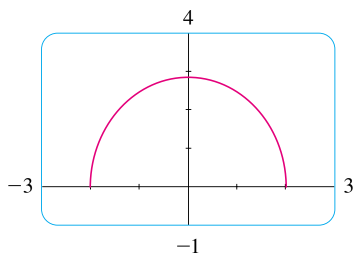


FIGURA 3

Perciò il dominio di f è l'intervallo $[-2, 2]$. Inoltre,

$$0 \leqslant \sqrt{8 - 2x^2} \leqslant \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

perciò l'immagine di f è l'intervallo $[0, 2\sqrt{2}]$.

Scegliamo la schermata in modo che l'intervallo delle ascisse sia poco più largo del dominio e l'intervallo delle ordinate sia poco più grande dell'immagine. Se consideriamo la schermata [–3, 3] per [–1, 4], otteniamo il grafico di Figura 3.

ESEMPIO 3 Disegnare la funzione $y = x^3 - 150x$.

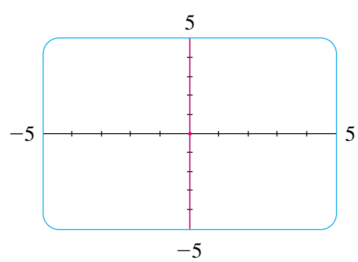


FIGURA 4

SOLUZIONE Il dominio è $\mathbb{R}$, l'insieme di tutti i numeri reali. Ciò non aiuta nella scelta di una particolare schermata, dunque procediamo per tentativi. Partendo con una schermata [–5, 5] per [–5, 5], si trova il grafico in Figura 4, che è quasi interamente vuoto. La ragione di ciò è che per ogni valore di x che il calcolatore ha scelto tra –5 e 5, eccetto 0, i valori corrispondenti di $f(x)$ sono più grandi di 5 o più piccoli di –5, perciò i punti corrispondenti del grafico sono fuori dalla schermata.

Se ingrandiamo in modo da avere la schermata [–10, 10] per [–10, 10] otteniamo l'immagine della Figura 5(a). Il grafico sembra essere costituito da linee verticali, ma sappiamo che ciò non può essere. Se osserviamo con attenzione mentre il grafico viene disegnato, ci accorgiamo che esso esce dallo schermo per rientrarvi poco dopo, durante l'elaborazione del disegno. Ciò indica che dobbiamo avere altre informazioni circa il comportamento nella direzione verticale, perciò cambiamo la schermata con il rettangolo [–10, 10] per [–100, 100]. Ciò che si ottiene è mostrato in Figura 5(b). Anche questo grafico non rivela completamente la forma della funzione, perciò proviamo la schermata [–10, 10] per [–200, 200], in Figura 5(c). Ora possiamo ritenere di essere arrivati ad avere una buona schermata. Nel Capitolo 4 vedremo che anche la Figura 5(c) non rivela tutte le caratteristiche della funzione.

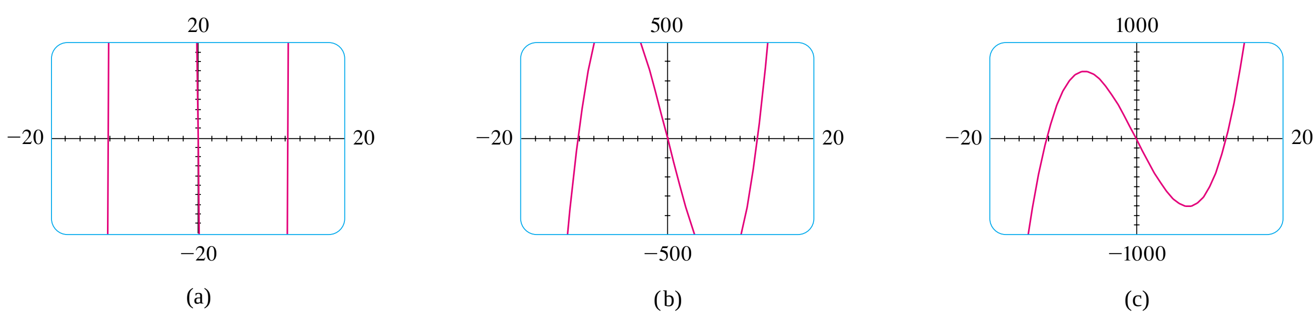


FIGURA 5 $f(x) = x^3 - 150x$

ESEMPIO 4 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \sin 50x$.

SOLUZIONE La Figura 6(a) mostra il grafico della funzione f con una schermata [–12, 12] per [–1.5, 1.5]. A prima vista il grafico sembra sensato, ma se si utilizza una delle schermate contenute nelle successive immagini appartenenti alla Figura 6, si ottengono grafici molto diversi. Accade qualcosa di strano

▲ Il grafico ottenuto in Figura 6 dipende dalla macchina o dal software usati; il lettore può aver ottenuto un grafico dall'aspetto ancora diverso.

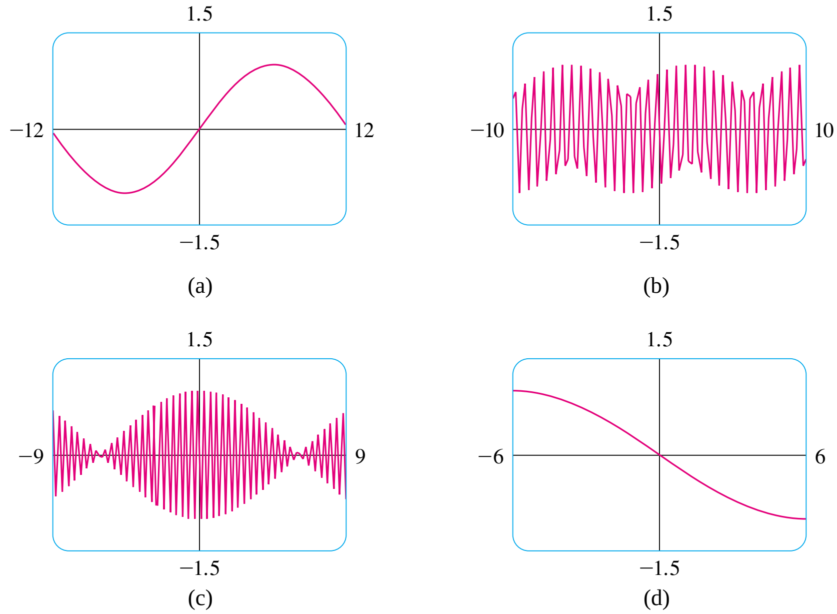


FIGURA 6
Il grafico di $f(x) = \sin 50x$ in quattro diverse schermate

Per spiegare le sostanziali differenze di questi grafici e per trovare una schermata opportuna, occorre per prima cosa trovare il periodo della funzione $y = \sin 50x$. Sappiamo che il periodo di $y = \sin x$ è 2π, perciò il periodo di $y = \sin 50x$ è

$$\frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0.126$$

Ciò suggerisce di considerare solo piccoli valori di x in modo da avere a che fare solo con poche oscillazioni della funzione. Se scegliamo la schermata $[-0.25, 0.25]$ per $[-1.5, 1.5]$, otteniamo il grafico in Figura 7.

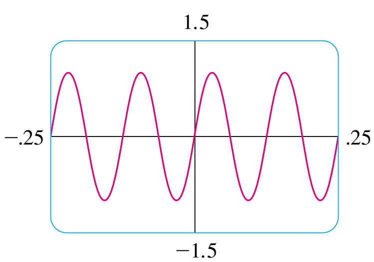


FIGURA 7
$f(x) = \sin 50x$

Ora capiamo cosa andava storto nella Figura 6. Le oscillazioni di $y = \sin 50x$ sono così rapide che quando il calcolatore disegna i punti e li unisce, perde la maggior parte dei massimi e dei minimi della funzione, costruendo un'approssimazione piuttosto fuorviante. ■

Abbiamo visto che l'uso di una schermata inadatta può dare informazioni errate sul grafico di una funzione. Negli Esempi 1 e 3 abbiamo risolto il problema utilizzando una schermata più larga. Nell'Esempio 4 abbiamo dovuto restringere la schermata. Nel prossimo esempio studieremo una funzione per la quale nessuna schermata rivela adeguatamente la forma del grafico.

ESEMPIO 5 Disegnare la funzione $f(x) = \sin x + \frac{1}{100}\cos 100x$.

SOLUZIONE La Figura 8 mostra il grafico di f prodotto da una calcolatrice scientifica con una schermata $[-6.5, 6.5]$ per $[-1.5, 1.5]$. Sembra il grafico di $y = \sin x$, forse con qualche lieve oscillazione in più. Se ingrandiamo la schermata fino a $[-0.1, 0.1]$ per $[-0.1, 0.1]$, in Figura 9, si possono vedere più chiaramente queste oscillazioni. La ragione di questo comportamento è che il secondo termine, $\frac{1}{100}\cos 100x$, è molto piccolo rispetto al primo, $\sin x$. Perciò in questo caso abbiamo bisogno di una coppia di grafici per intuire il comportamento della funzione.

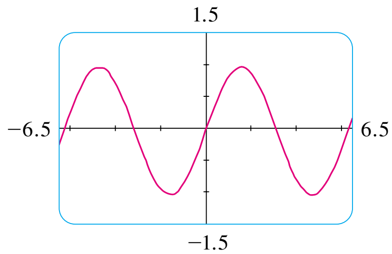


FIGURA 8

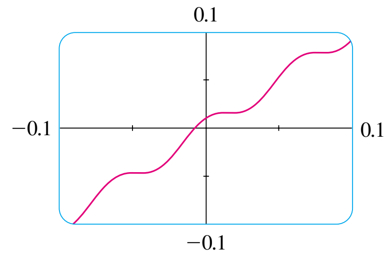
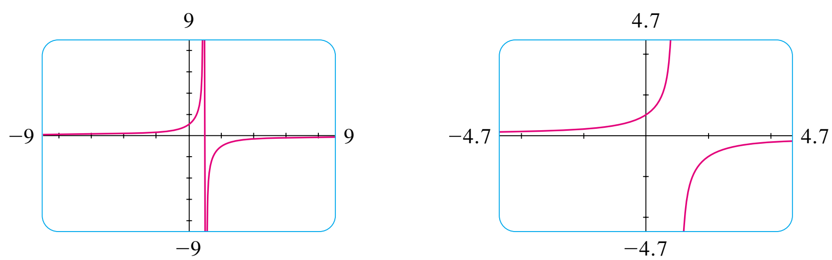


FIGURA 9

ESEMPIO 6 Disegnare la funzione $y = \dfrac{1}{1 - x}$.

SOLUZIONE La Figura 10(a) mostra il grafico di f prodotto da una calcolatrice con una schermata $[-9, 9]$ per $[-9, 9]$. Nell'interpolazione di punti successivi appartenenti al grafico, il calcolatore ha prodotto una linea verticale, dall'estremità superiore a quella inferiore dello schermo. Questa linea non appartiene al grafico della funzione, in verità. Si osservi infatti che il dominio di $y = 1/(1 - x)$ è $\{x \mid x \neq 1\}$. Possiamo cercare di eliminare questa linea estranea al grafico tentando una nuova scelta di scala nella schermata; passando a una più piccola, [–5, 5] per [–5, 5], otteniamo un grafico migliore, quello di Figura 10(b).

▲ Per evitare che compaiano linee estranee nel grafico, si può chiedere al calcolatore di non connettere i punti del grafico.



(a) (b)

FIGURA 10
$y = \dfrac{1}{1 - x}$

ESEMPIO 7 Disegnare la funzione $y = \sqrt[3]{x}$.

SOLUZIONE Alcune macchine calcolatrici mostrano come risultato il grafico di Figura 11, mentre altre producono un grafico tipo quello nella Figura 12. Sappiamo, dal Paragrafo 1.2 (Figura 13), che è corretto il grafico della Figura 12; cosa è accaduto nella Figura 11, dunque? La spiegazione è nel fatto che alcune calcolatrici calcolano $x^{1/3}$ come $e^{(1/3)\ln x}$ e $\ln x$ non è definito per $x < 0$, perciò si ottiene solo la metà destra del grafico.

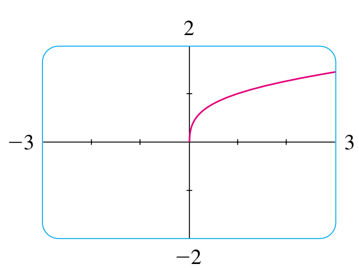


FIGURA 11

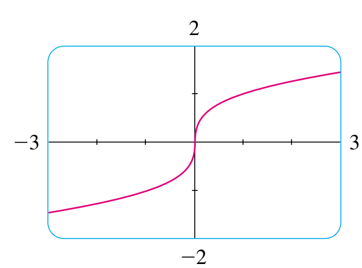


FIGURA 12

Si provi a sperimentare con gli strumenti a disposizione quale dei due grafici viene prodotto. Se si ottiene una forma come quella in Figura 11, si può ottenere il grafico corretto per mezzo della funzione

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$$

Si osservi che questa funzione coincide con $\sqrt[3]{x}$ (eccetto in $x = 0$).

Per capire bene quale relazione lega una funzione al suo grafico, è utile disegnare una **famiglia di funzioni**, ossia un insieme di funzioni le cui equazioni sono in qualche modo simili. Nel prossimo esempio disegneremo alcune funzioni appartenenti alla famiglia dei polinomi cubici.

ESEMPIO 8 Disegnare la funzione $y = x^3 + cx$ per diversi valori del parametro c.

SOLUZIONE La Figura 13 mostra il grafico di $y = x^3 + cx$ per $c = 2, 1, 0, -1$ e -2. Per valori positivi di c, il grafico cresce da sinistra a destra senza punti di massimo o minimo (picchi o vallate). Quando $c = 0$, la curva si appiattisce nell'intorno dell'origine. Se c è negativa, la curva ha un massimo e un minimo. Se c decresce, il massimo aumenta la sua quota mentre il minimo si abbassa.

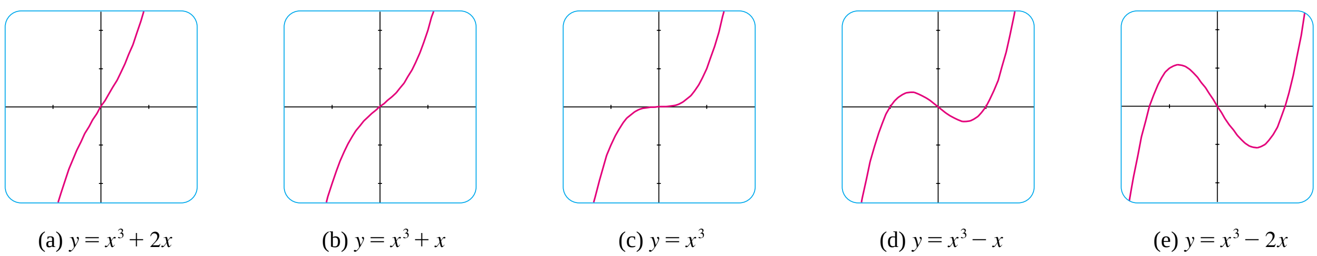


FIGURA 13
Alcune funzioni della famiglia $y = x^3 + cx$, disegnate nella schermata $[-2, 2]$ per $[-2.5, 2.5]$

ESEMPIO 9 Trovare la soluzione dell'equazione $\cos x = x$ corretta fino alle prime due cifre decimali.

SOLUZIONE La soluzione dell'equazione $\cos x = x$ è la coordinata x dell'intersezione delle curve $y = \cos x$ e $y = x$. Dalla Figura 14(a) si ricava che c'è una sola soluzione e che questa si trova tra 0 e 1. Con una schermata [0, 1] per [0, 1], Figura 14(b), capiamo che la radice dell'equazione si trova tra 0.7 e 0.8. Perciò ingrandiamo ulteriormente la schermata fino a [0.7, 0.8] per [0.7, 0.8], Figura 14(c). Spostando il cursore sull'intersezione delle due curve, tenendo conto che la scala delle ascisse è 0.01, concludiamo che la radice è circa 0.74.

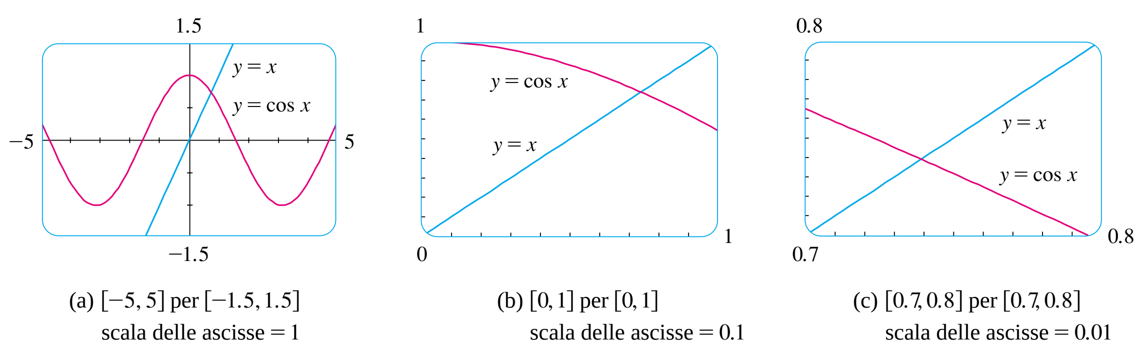


FIGURA 14
Risoluzione dell'equazione $\cos x = x$

1.4 Esercizi

1. Utilizzare una calcolatrice grafica o un computer per determinare quale delle seguenti schermate è la più appropriata per disegnare il grafico della funzione $f(x) = 10 + 25x - x^3$.
   (a) $[-4, 4]$ per $[-4, 4]$
   (b) $[-10, 10]$ per $[-10, 10]$
   (c) $[-20, 20]$ per $[-100, 100]$
   (d) $[-100, 100]$ per $[-200, 200]$

2. Utilizzare una calcolatrice grafica o un computer per determinare quale delle seguenti schermate è la più appropriata per disegnare il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$.
   (a) $[-4, 4]$ per $[-4, 4]$
   (b) $[-5, 5]$ per $[0, 100]$
   (c) $[-10, 10]$ per $[-10, 40]$
   (d) $[-2, 10]$ per $[-2, 6]$

3–14 ■ Determinare una schermata appropriata per la funzione data e usarla per disegnare il grafico.

3. $f(x) = 5 + 20x - x^2$
4. $f(x) = x^3 + 30x^2 + 200x$
5. $f(x) = \sqrt[4]{81 - x^4}$
6. $f(x) = \sqrt{0.1x + 20}$
7. $f(x) = x^2 + \dfrac{100}{x}$
8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 100}$
9. $f(x) = \cos 100x$
10. $f(x) = 3 \sin 120x$
11. $f(x) = \sin(x/40)$
12. $y = \tan 25x$
13. $y = 3^{\cos(x^2)}$
14. $y = x^2 + 0.02 \sin 50x$

15. Disegnare il grafico dell'ellisse $4x^2 + 2y^2 = 1$ disegnando il grafico delle funzioni che descrivono la semi-ellisse superiore e inferiore.

16. Disegnare il grafico dell'iperbole $y^2 - 9x^2 = 1$ disegnando il grafico delle funzioni che descrivono i rami superiori e inferiori dell'iperbole.

17–19 ■ Trovare le soluzioni, corrette alla seconda cifra decimale, delle seguenti equazioni.

17. $x^3 - 9x^2 - 4 = 0$
18. $x^3 = 4x - 1$
19. $x^2 = \sin x$

20. Si è visto nell'Esempio 9 che l'equazione $\cos x = x$ ha una sola soluzione.
   (a) Usare un metodo grafico per determinare che l'equazione $\cos x = 0.3x$ ha tre soluzioni e calcolarne i valori corretti alla seconda cifra decimale.
   (b) Trovare un opportuno valore di m affinché l'equazione $\cos x = mx$ abbia esattamente due soluzioni.

21. Usare un metodo grafico per determinare quale funzione predomina (ossia quale è più grande quando x è grande) tra $f(x) = 10x^2$ e $g(x) = x^3/10$.

22. Usare un metodo grafico per determinare quale funzione predomina tra $f(x) = x^4 - 100x^3$ e $g(x) = x^3$.

23. Per quali valori di x si ha $|\sin x - x| < 0.1$?

24. Disegnare i polinomi $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ e $Q(x) = 3x^5$ sulla stessa schermata, prima con un rettangolo $[-2, 2]$ per $[-2, 2]$, quindi con un rettangolo $[-10, 10]$ per $[-10^4, 10^4]$. Cosa si può osservare da questi grafici?

25. Si consideri la famiglia di funzioni $f(x) = \sqrt[n]{x}$, dove n è un intero positivo.
   (a) Disegnare le funzioni $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ e $y = \sqrt[6]{x}$ sulla stessa schermata di dimensioni $[-1, 4]$ per $[-1, 3]$.
   (b) Disegnare le funzioni $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt[5]{x}$ sulla medesima schermata di dimensioni $[-3, 3]$ per $[-2, 2]$. (Si confronti con l'Esempio 7.)
   (c) Disegnare le funzioni $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ e $y = \sqrt[5]{x}$ con una schermata di dimensioni $[-1, 3]$ per $[-1, 2]$.
   (d) Quali conclusioni si possono trarre da questi grafici?

26. Si consideri la famiglia di funzioni $f(x) = 1/x^n$, dove n è un intero positivo.
   (a) Disegnare le funzioni $y = 1/x$ e $y = 1/x^3$ in una schermata di dimensioni $[-3, 3]$ per $[-3, 3]$.
   (b) Disegnare le funzioni $y = 1/x^2$ e $y = 1/x^4$ nella schermata proposta al punto (a).
   (c) Sovrapporre i disegni delle parti (a) e (b) in una schermata di dimensioni $[-1, 3]$ per $[-1, 3]$.
   (d) Quali conclusioni si possono trarre da questi grafici?

27. Disegnare i grafici della funzione $f(x) = x^4 + cx^2 + x$ per diversi valori del parametro c. Come cambiano i grafici al variare di c?

28. Disegnare i grafici della funzione $f(x) = \sqrt{1 + cx^2}$ per diversi valori del parametro c. Descrivere come il valore di c influenza il grafico.

29. Disegnare le funzioni $y = x^n 2^{-x}$, $x \geqslant 0$, per $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6. Come cambiano le curve al crescere di n?

30. Disegnare le curve di equazione
$$y = \frac{|x|}{\sqrt{c - x^2}}$$
e descrivere cosa accade al crescere di c.

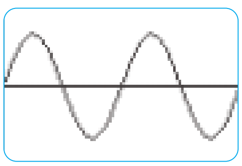
31. Cosa accade al grafico di $y^2 = cx^3 + x^2$ al variare di c?

32. Questo esercizio esplora gli effetti della funzione interna g in una funzione composta $y = f(g(x))$.

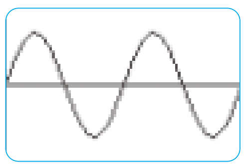
(a) Disegnare il grafico della funzione $y = \sin\left(\sqrt{x}\right)$ usando una schermata $[0, 400]$ per $[-1.5, 1.5]$. In cosa questo grafico differisce da quello della funzione seno?

(b) Disegnare il grafico della funzione $y = \sin(x^2)$ usando una schermata $[-5, 5]$ per $[-1.5, 1.5]$. In cosa questo grafico differisce da quello della funzione seno?

33. La figura mostra i grafici di $y = \sin 96x$ e $y = \sin 2x$ prodotti da una calcolatrice grafica.



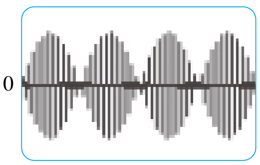
$y = \sin 96x$

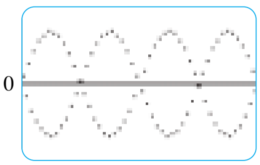


$y = \sin 2x$

Il primo grafico è inaccurato. Spiegare perché i due grafici appaiono identici. (*Suggerimento*: la schermata è larga 96 pixel. Quali sono i punti disegnati dalla calcolatrice?)

34. La figura seguente riporta il grafico di $y = \sin 45x$ fatto da una calcolatrice in una rappresentazione per segmenti e per punti.





Il grafico è inaccurato. Quali due funzioni sinusoidali vengono invece visualizzate? Mostrare che in ogni punto della schermata (larga 95 pixel) la calcolatrice sceglie di rappresentare una di queste due curve.

1.5 Funzioni esponenziali

La funzione $f(x) = 2^x$ è detta *funzione esponenziale* perché la variabile, x, compare come esponente. Non bisogna confondere queste funzioni con la funzione potenza $g(x) = x^2$, dove la variabile è la base.

In generale, una **funzione esponenziale** è una funzione della forma

$$f(x) = a^x$$

dove a è una costante positiva. Ricordiamo cosa ciò significhi.

Se $x = n$, intero positivo, allora

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fattori}}$$

Se $x = 0$, allora $a^0 = 1$, e se $x = -n$, dove n è un intero positivo, allora

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Se x è un numero razionale, $x = p/q$, dove p e q sono interi e $q > 0$, allora

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Ma qual è il significato di a^x se x è un numero irrazionale? Per esempio, cosa significa $2^{\sqrt{3}}$ oppure 5^{π}?

Prima di rispondere a questa domanda, osserviamo il grafico della funzione $y = 2^x$ per x razionale, rappresentato in Figura 1. Vorremmo allargare il dominio di questa funzione in modo che sia costituito sia dai razionali sia dagli irrazionali.

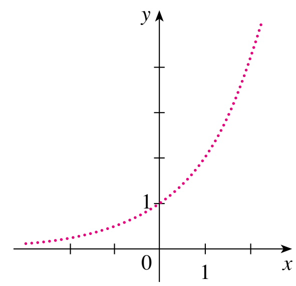


FIGURA 1
Rappresentazione della funzione $y = 2^x$, con x razionale

Nel grafico di Figura 1 compaiono dei buchi che corrispondono ai valori irrazionali di x. Vogliamo riempire questi buchi definendo $f(x) = 2^x$, dove $x \in \mathbb{R}$, in modo che f sia una funzione crescente. In particolare, siccome il numero irrazionale $\sqrt{3}$ soddisfa la limitazione

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

deve essere, di conseguenza:

$$2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}$$

e sappiamo che $2^{1.7}$ e $2^{1.8}$ hanno senso perché 1.7 e 1.8 sono razionali. Analogamente, usando approssimazioni migliori per $\sqrt{3}$, otteniamo approssimazioni migliori di $2^{\sqrt{3}}$:

$$\begin{array}{rcl}
1.73 < \sqrt{3} < 1.74 & \Rightarrow & 2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74} \\
1.732 < \sqrt{3} < 1.733 & \Rightarrow & 2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.733} \\
1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321 & \Rightarrow & 2^{1.7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.7321} \\
1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206 & \Rightarrow & 2^{1.73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.73206} \\
\vdots \quad \vdots & & \vdots \quad \vdots
\end{array}$$

Si può mostrare che c'è uno e un solo numero che è più grande di tutti i numeri

$$2^{1.7}, \quad 2^{1.73}, \quad 2^{1.732}, \quad 2^{1.7320}, \quad 2^{1.73205}, \quad \ldots$$

e più piccolo di tutti i numeri

$$2^{1.8}, \quad 2^{1.74}, \quad 2^{1.733}, \quad 2^{1.7321}, \quad 2^{1.73206}, \quad \ldots$$

Prendiamo questo numero come definizione di $2^{\sqrt{3}}$. Tramite il processo di approssimazione precedente possiamo calcolarlo correttamente fino alla sesta cifra decimale:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$$

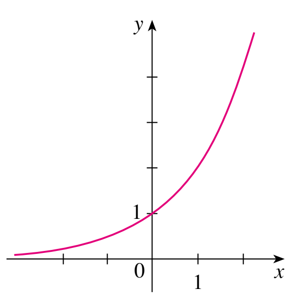


FIGURA 2
$y = 2^x$, x reale

Allo stesso modo, definiamo 2^x (o a^x, se $a > 0$) dove x è un qualunque irrazionale. La Figura 2 mostra come sono stati riempiti tutti i buchi che comparivano nella Figura 1 per ottenere il grafico della funzione $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

I grafici delle funzioni $y = a^x$ sono disegnati in Figura 3 per diversi valori della base a. Si osservi che tutti questi grafici passano per il punto $(0, 1)$ perché $a^0 = 1$ se $a \neq 0$. Si osservi inoltre che al crescere della base l'esponenziale cresce più rapidamente (per $x > 0$).

▲ Se $0 < a < 1$, allora a^x si avvicina a 0 se x cresce. Se $a > 1$, allora a^x si avvicina a 0 se x decresce assumendo valori negativi, senza essere limitata. In entrambi i casi l'asse x è asintoto orizzontale. Ulteriori questioni sono discusse nel Paragrafo 2.5.

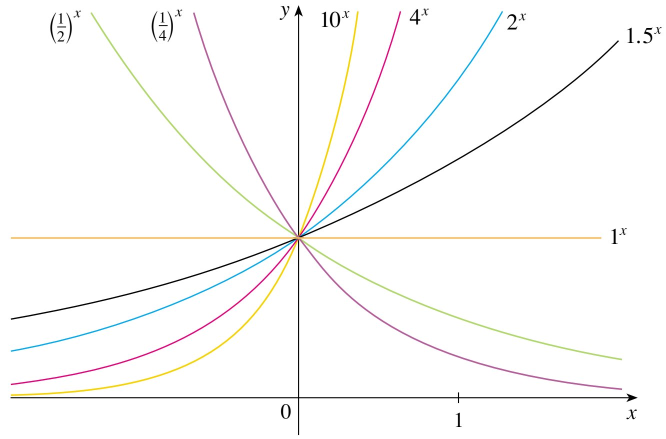
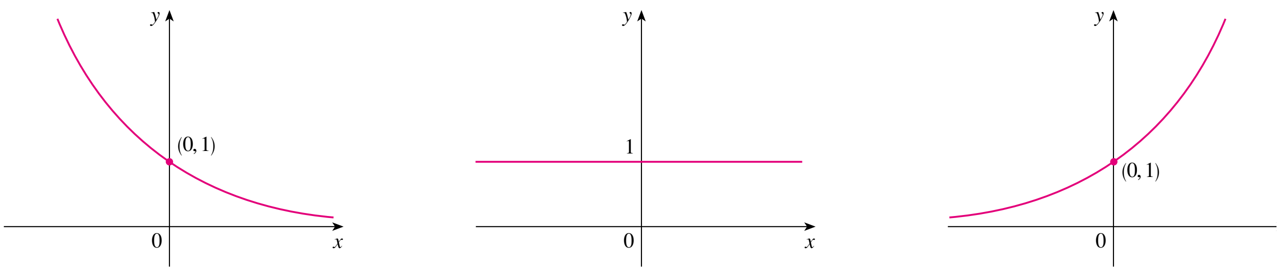


FIGURA 3

Si può ricavare dalla Figura 3 che ci sono essenzialmente tre tipi di funzioni esponenziali $y = a^x$. Se $0 < a < 1$, la funzione esponenziale decresce, se $a = 1$ è costante; se $a > 1$, l'esponenziale è crescente. Questi casi sono illustrati nella Figura 4. Si osservi che se $a \neq 1$, allora la funzione esponenziale $y = a^x$ ha dominio $\mathbb{R}$ e immagine $(0, +\infty)$ Si osservi inoltre che, poiché $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$, il grafico di $y = (1/a)^x$ è la riflessione rispetto all'asse y del grafico di $y = a^x$.



(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = a^x$, $a > 1$

FIGURA 4

Una delle ragioni dell'importanza della funzione esponenziale va cercata nelle sue tipiche proprietà. Se x e y sono numeri razionali, allora queste sono proprietà ben note dell'algebra. Si può provare che sono vere anche per un qualunque numero reale x o y.

Proprietà delle potenze Se a e b sono numeri positivi e x e y sono reali, allora

1. $a^{x+y} = a^x a^y$

2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

3. $(a^x)^y = a^{xy}$

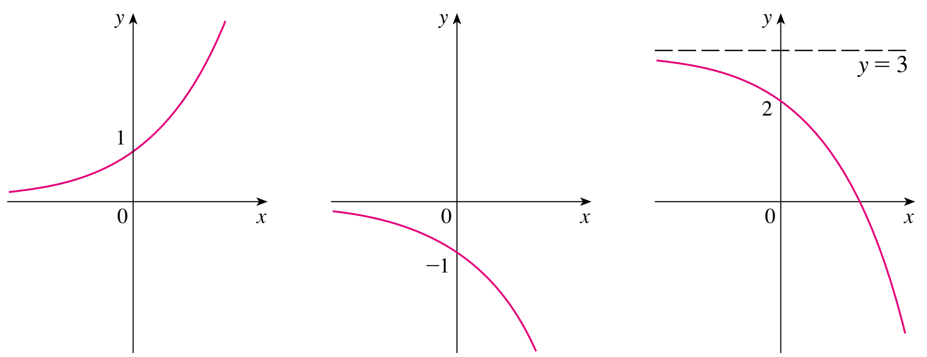
4. $(ab)^x = a^x b^x$

▲ Nel Paragrafo 1.3 sono riportati i rudimenti delle traslazioni e riflessioni dei grafici.

ESEMPIO 1 Disegnare il grafico della funzione $y = 3 - 2^x$ determinandone dominio e immagine.

SOLUZIONE Per prima cosa riflettiamo il grafico di $y = 2^x$ (Figura 2) rispetto all'asse x ottenendo il grafico di $y = -2^x$ [Figura 5(b)]. Traslandolo di tre unità verso l'alto si ottiene il grafico di $y = 3 - 2^x$ [Figura 5(c)]. Il dominio è $\mathbb{R}$ e l'immagine è $(-\infty, 3)$.

FIGURA 5



(a) $y = 2^x$ (b) $y = -2^x$ (c) $y = 3 - 2^x$

ESEMPIO 2 Utilizzare un computer per confrontare le funzioni $f(x) = 2^x$ e la potenza $y = x^2$. Quale delle due cresce più rapidamente quando x diventa grande?

SOLUZIONE La Figura 6 mostra un disegno di entrambe le funzioni in una schermata $[-2, 6]$ per $[0, 40]$. Osserviamo che i grafici si intersecano tre volte, ma per $x > 4$ il grafico di $f(x) = 2^x$ sta sopra il grafico della funzione $g(x) = x^2$. La Figura 7 ritrae una situazione ancora più globale, e mostra che per grandi valori di x la funzione esponenziale $y = 2^x$ cresce molto più rapidamente della potenza $y = x^2$.

▲ L'Esempio 2 mostra che $y = 2^x$ cresce più rapidamente di $y = x^2$. Per valutare euristicamente quanto rapida è la crescita della funzione esponenziale, pensiamo al seguente esperimento concettuale. Un foglio di carta spesso un centesimo di millimetro viene piegato in due parti uguali per 50 volte. Qual è lo spessore della carta dopo queste operazioni? Può sembrare sorprendente, ma il risultato, $2^{50}/100$ mm, supera gli 11 miliardi di kilometri!

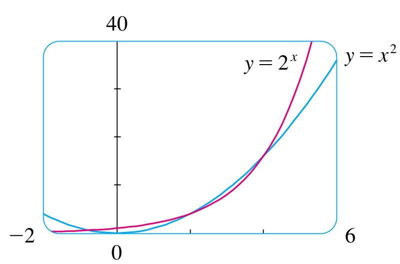


FIGURA 6

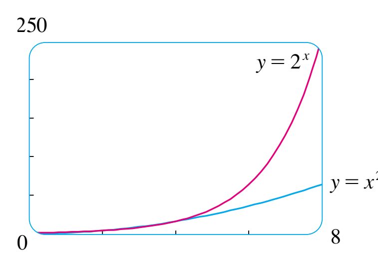


FIGURA 7

Applicazioni delle funzioni esponenziali

La funzione esponenziale è usata molto frequentemente per rappresentare modelli matematici che descrivono fenomeni naturali e sociali. Descriveremo ora brevemente come si origina una modellizzazione della crescita della popolazione o del decadimento radioattivo. Nei capitoli successivi presenteremo queste e altre applicazioni in grande dettaglio.

Consideriamo innanzitutto una popolazione di batteri in un mezzo di coltura. Si supponga che ispezionando la popolazione a intervalli regolari si determini che questa raddoppia ogni ora. Se il numero dei batteri al tempo t è $p(t)$, dove t è misurato in ore, e la popolazione iniziale è $p(0) = 1000$, allora si ha

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$
$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$
$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

Da questo schema sembra di poter dedurre che

$$p(t) = 2^t \times 1000 = (1000)2^t$$

La funzione che questa popolazione rappresenta è un multiplo della funzione esponenziale $y = 2^t$, perciò presenta la crescita rapidissima che possiamo osservare nelle Figure 2 e 7. In condizioni ideali (spazio e nutrimento illimitati e nessuna malattia) la crescita esponenziale ritrae quanto accade effettivamente in natura.

Cosa possiamo dire sulla popolazione umana, a questo proposito? La Tabella 1 riporta i valori della popolazione mondiale nel ventesimo secolo e la Figura 8 li rappresenta opportunamente in un grafico discreto.

TABELLA 1

Anno	Popolazione (milioni)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6070

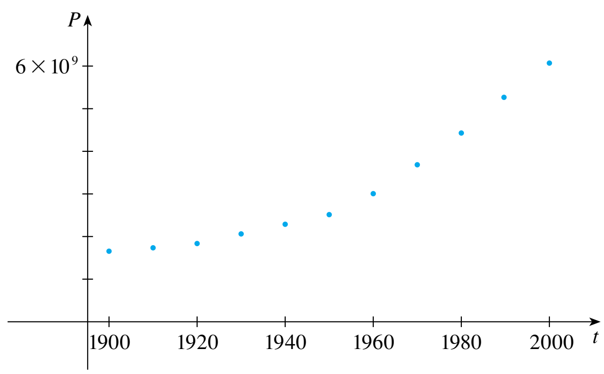


FIGURA 8 Diagramma a punti per la crescita della popolazione mondiale

La forma del grafico suggerisce che questa popolazione abbia una crescita di tipo esponenziale, perciò con un calcolatore che utilizzi il metodo dei minimi quadrati per una regressione esponenziale si trova

$$P = (0.008196783) \cdot (1.013723)^t$$

La Figura 9 mostra il grafico della funzione esponenziale ottenuta: questa segue i dati in modo piuttosto convincente. I periodi di crescita rallentata della popolazione possono essere relazionati con le due guerre mondiali.

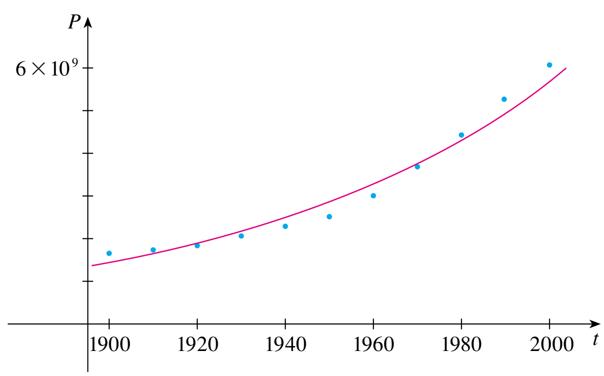


FIGURA 9 Modello esponenziale per la crescita della popolazione mondiale

ESEMPIO 3 Il *tempo di dimezzamento* dello stronzio-90, ^{90}Sr, è di 25 anni. Ciò significa che metà di una certa quantità di ^{90}Sr si disintegrerà in 25 anni.
(a) Se un campione di ^{90}Sr ha massa 24 mg, trovare l'espressione per la massa $m(t)$ che rimane dopo t anni.
(b) Trovare la massa dopo 40 anni, corretta al milligrammo.
(c) Disegnare $m(t)$ con un calcolatore e utilizzare il grafico per stimare il tempo necessario affinché la massa superstite sia di 5 mg.

SOLUZIONE
(a) La massa è inizialmente di 24 mg e si dimezza ogni 25 anni, perciò

$$m(0) = 24$$

$$m(25) = \frac{1}{2}(24)$$

$$m(50) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(24) = \frac{1}{2^2}(24)$$

$$m(75) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}(24) = \frac{1}{2^3}(24)$$

$$m(100) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3}(24) = \frac{1}{2^4}(24)$$

Da questo schema, si ricava che la massa rimanente dopo t anni è

$$m(t) = \frac{1}{2^{t/25}}(24) = 24 \cdot 2^{-t/25}$$

Si tratta di una funzione esponenziale con base $a = 2^{-1/25} = 1/2^{1/25}$.
(b) La massa superstite dopo 40 anni è

$$m(40) = 24 \cdot 2^{-40/25} \approx 7.9 \text{ mg}$$

(c) Con l'ausilio di un calcolatore si riesce a disegnare la funzione $m(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$ riportata in Figura 10. Disegnando la retta $m = 5$, si può stimare che $m(t) = 5$ quando $t \approx 57$, perciò la massa campione si sarà ridotta a 5 mg dopo circa 57 anni. ■

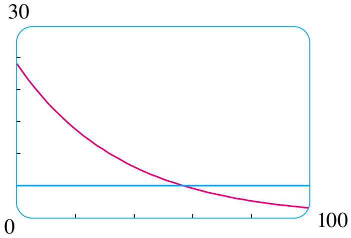


FIGURA 10
$m = 24 \cdot 2^{-t/25}$

Il numero *e*

Tra tutte le possibili basi per la funzione esponenziale, una è certamente più conveniente, almeno per gli obiettivi del calcolo. La scelta della base a è influenzata dal modo in cui il grafico di $y = a^x$ interseca l'asse y. Le Figure 11 e 12 mostrano quali

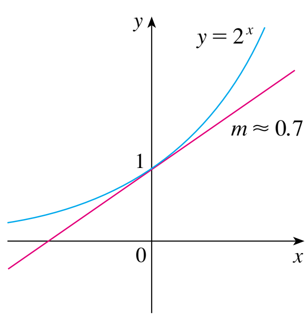


FIGURA 11

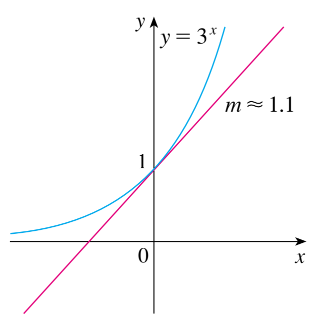


FIGURA 12

sono le tangenti ai grafici di $y = 2^x$ e $y = 3^x$ nel punto (0, 1). (Il concetto di retta tangente verrà definito con precisione nel Paragrafo 2.6. Per ora ci basta pensare alla tangente come a quella retta che tocca il grafico dell'esponenziale solamente in un punto.) Se misurassimo i loro coefficienti angolari troveremmo $m \approx 0.7$ per $y = 2^x$ e $m \approx 1.1$ per $y = 3^x$.

Alcune delle formule del calcolo, come vedremo nel Capitolo 3, risulterebbero notevolmente semplificate se scegliessimo la base a in modo che il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $y = a^x$ fosse *esattamente* 1 (Figura 13). La base con questa proprietà esiste e viene indicata con la lettera e. (Questa notazione fu scelta dal matematico svizzero Eulero nel 1727, probabilmente perché corrisponde alla prima lettera della parola *esponenziale*; la funzione e^x è infatti detta "esponenziale".) Dopo una attenta osservazione delle Figure 11 e 12 non sorprende il fatto che il numero e sia un valore compreso tra 2 e 3 e che il grafico di $y = e^x$ sia contenuto tra i grafici di $y = 2^x$ e $y = 3^x$ (Figura 14). Nel Capitolo 3 vedremo che il valore corretto alla quinta cifra decimale del numero e è

$$e \approx 2.71828$$

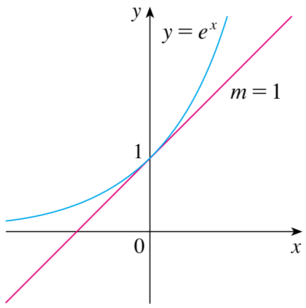


FIGURA 13
L'esponenziale interseca l'asse y con pendenza 1.

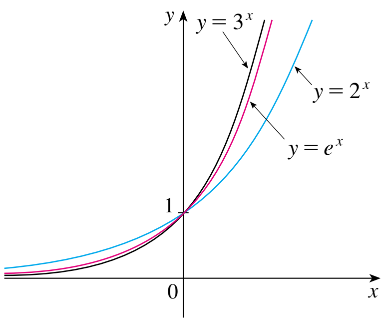
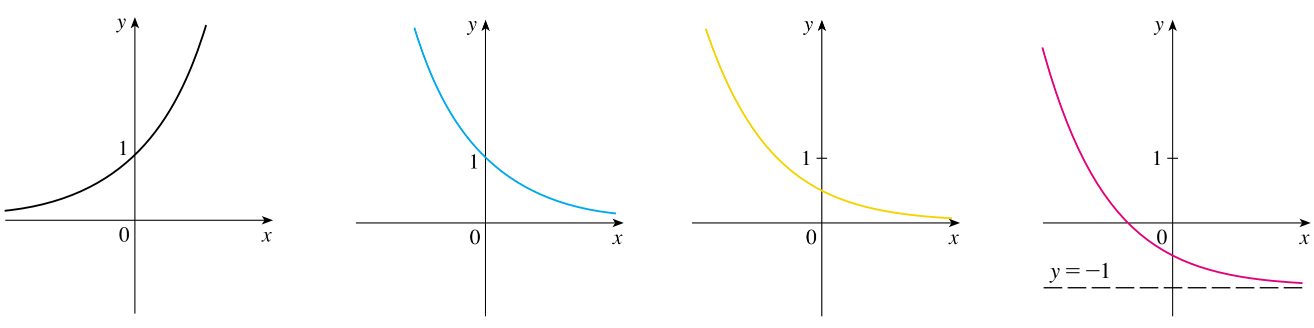


FIGURA 14

ESEMPIO 4 Disegnare il grafico della funzione $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ e stabilirne il dominio e l'immagine.

SOLUZIONE Partiamo dal grafico di $y = e^x$ in Figura 13 e 15(a) e per riflessione rispetto all'asse y otteniamo il grafico di $y = e^{-x}$ in Figura 15(b). (Si osservi che il grafico interseca l'asse y con una pendenza pari a –1.) Quindi contraiamo verticalmente il grafico di un fattore 2 ottenendo il grafico di $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ [Figura 15(c)]. Infine, trasliamo il grafico verso il basso di una unità per ottenere il grafico cercato nella Figura 15(d). Il dominio è $\mathbb{R}$, e l'immagine è $(-1, +\infty)$.



(a) $y = e^x$ (b) $y = e^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ (d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

FIGURA 15

Quanto grande dovrà essere scelta l'ascissa x nel grafico di $y = e^x$ affinché l'ordinata corrispondente assuma il valore di un milione? Il prossimo esempio fornisce una risposta che potrà sorprendere, e che dà un'idea della rapidità di crescita della funzione esponenziale.

ESEMPIO 5 Usare degli strumenti grafici per risolvere la disequazione $e^x > 1\,000\,000$.

SOLUZIONE In Figura 16 disegniamo sia la funzione $y = e^x$ sia la retta orizzontale $y = 1\,000\,000$. L'intersezione avviene nelle vicinanze del valore $x = 13.8$. Perciò, $e^x > 10^6$ per $x > 13.8$. Ci si poteva aspettare che l'esponenziale raggiungesse valori così grandi quando x vale solo 14?

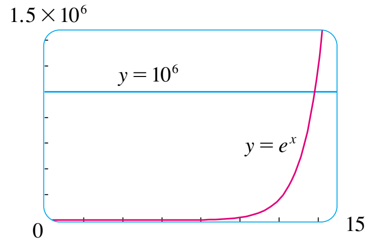


FIGURA 16

1.5 Esercizi

1. (a) Scrivere una funzione esponenziale con base $a > 0$.
   (b) Qual è il dominio di questa funzione?
   (c) Se $a \neq 1$, qual è l'immagine di questa funzione?
   (d) Disegnare il grafico della funzione esponenziale in uno dei casi seguenti:
   (i) $a > 1$ (ii) $a = 1$ (iii) $0 < a < 1$

2. (a) Come è definito il numero e?
   (b) Qual è un valore approssimato del numero e?
   (c) Qual è la funzione esponenziale naturale?

3–6 ■ Disegnare i grafici delle seguenti funzioni. Come sono gli uni rispetto agli altri?

3. $y = 2^x, \quad y = e^x, \quad y = 5^x, \quad y = 20^x$

4. $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad y = 8^x, \quad y = 8^{-x}$

5. $y = 3^x, \quad y = 10^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

6. $y = 0.9^x, \quad y = 0.6^x, \quad y = 0.3^x, \quad y = 0.1^x$

7–12 ■ Senza l'uso della calcolatrice, tracciare un diagramma approssimativo delle seguenti funzioni, usando invece, se necessario, le Figure 3 e 14 e le trasformazioni del Paragrafo 1.3.

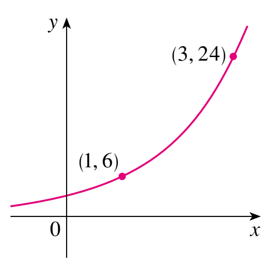
7. $y = 4^x - 3$
8. $y = 4^{x-3}$
9. $y = -2^{-x}$
10. $y = 1 + 2e^x$
11. $y = 3 - e^x$
12. $y = 2 + 5(1 - e^{-x})$

13. Partendo dal grafico di $y = e^x$, scrivere l'equazione del grafico che risulta da
    (a) una traslazione verso il basso di due unità
    (b) una traslazione di due unità verso l'alto
    (c) una riflessione rispetto all'asse x
    (d) una riflessione rispetto all'asse y
    (e) una riflessione rispetto all'asse x e una riflessione rispetto all'asse y

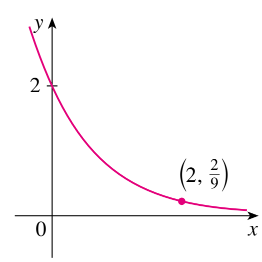
14. Partendo dal grafico di $y = e^x$, scrivere l'equazione del grafico che risulta da
    (a) una riflessione rispetto alla retta $y = 4$
    (b) una riflessione rispetto alla retta $x = 2$

15–16 ■ Trovare la funzione esponenziale del tipo $y = Ca^x$ il cui grafico è quello assegnato.

15.



16.



17. Se $f(x) = 5^x$, mostrare che

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

18. Per un lavoro di un mese, quale compenso sarebbe più conveniente?
    I. Un miliardo di euro a fine mese.
    II. Due euro il primo giorno, 4 euro il secondo, 8 il terzo e in generale 2^{n-1} euro l'n-esimo giorno.

19. Mostrare che se i grafici di $f(x) = x^2$ e di $g(x) = 2^x$ vengono disegnati in una stessa griglia di assi coordinati, la cui unità di misura è 1 cm, allora a una distanza di una dozzina di centimetri f vale poco più di un metro, mentre g vale già più di 40 metri.

20. Confrontare la funzione $f(x) = x^5$ con $g(x) = 5^x$ disegnandole entrambe con diverse schermate. Trovare tutti i punti di intersezione, corretti alla prima cifra decimale. Quale funzione cresce più rapidamente quando x è grande?

21. Confrontare la funzione $f(x) = x^{10}$ con $g(x) = e^x$ disegnandole entrambe in diverse schermate. Quando il grafico di g sorpassa quello di f?

22. Stimare graficamente il valore di x tale che
$e^x > 1\,000\,000\,000$.

23. Si sa che, in condizioni ideali, una popolazione di batteri raddoppia ogni tre ore. Si suppone che inizialmente vi siano 100 batteri.
(a) Qual è la popolazione dopo 15 ore?
(b) Qual è la popolazione dopo t ore?
(c) Stimare la popolazione dopo 20 ore.
(d) Disegnare la funzione che descrive la crescita della popolazione e stimare quando questa raggiunge quota 50 000.

24. Un isotopo del sodio, ^{24}Na, ha un tempo di dimezzamento di 15 ore. Un campione di questo isotopo ha massa 2 g.
(a) Trovare la massa rimanente dopo 60 ore.
(b) Trovare la quantità rimanente dopo t ore.
(c) Stimare la quantità rimanente dopo 4 giorni.
(d) Usare un grafico per stimare quando la massa residua sarà di 0.01 g.

25. Usare uno strumento grafico e un programma di regressione esponenziale per modellizzare la crescita della popolazione mondiale tra il 1950 e il 2000, con i dati della Tabella 1 di pagina 60. Usare il modello per stimare la popolazione nel 1993 e per predire la popolazione nel 2010.

26. La tabella seguente mostra la popolazione (in milioni) degli Stati Uniti tra il 1900 e il 2000.

Anno	Popolazione	Anno	Popolazione
1900	76	1960	179
1910	92	1970	203
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	275
1950	150		

Modellizzare la crescita con una regressione esponenziale e stimare così la popolazione nel 1925. Predire la popolazione negli anni 2010 e 2020.

1.6 Funzioni inverse e logaritmi

La Tabella 1 riassume i risultati di una sperimentazione nella quale una coltura di batteri di 100 individui inizialmente è stata posta in un mezzo con una limitata quantità di nutriente; il numero dei batteri N è stato rilevato ogni ora come funzione del tempo $t : N = f(t)$.

Si supponga a questo punto che il biologo cambi il suo punto di vista, e sia cioè interessato a conoscere l'intervallo di tempo necessario alla popolazione di batteri per raggiungere un certo livello. In altre parole, si supponga che egli sia interessato a conoscere t in funzione di N. Questa funzione viene chiamata la *funzione inversa* di f, ed è indicata f^{-1}, che si legge "inversa di f". Perciò $t = f^{-1}(N)$ è il tempo richiesto dalla popolazione di batteri per raggiungere N. Il valore di f^{-1} può essere trovato sia in Tabella 1, letta all'indietro, sia in Tabella 2. Per esempio, $f^{-1}(550) = 6$ poiché $f(6) = 550$.

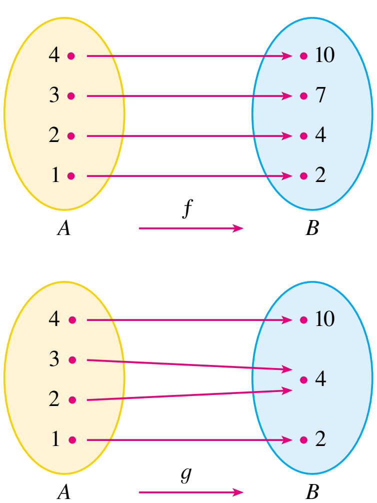


FIGURA 1

TABELLA 1 N come funzione di t

t (ore)	$N = f(t)$ = popolazione nel tempo t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABELLA 2 t come funzione di N

N	$t = f^{-1}(N)$ = tempo richiesto per ragg. N batteri
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

Non tutte le funzioni hanno inversa. Si confrontino le funzioni f e g rappresentate in Figura 1 con un diagramma a frecce. Si osservi che f non assume mai lo stesso valore (ingressi diversi in A producono uscite diverse), al contrario g assume due volte lo stesso valore (sia 2 sia 3 hanno la stessa uscita). Con notazione formale,

$$g(2) = g(3)$$

ma $$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{ogni qualvolta } x_1 \neq x_2$$

Funzioni che hanno quest'ultima proprietà sono dette *funzioni uno a uno*.

▲ In un linguaggio che fa uso di ingresso e uscita f è uno a uno se a ogni uscita corrisponde un solo ingresso.

1 Definizione Una funzione f è detta **funzione uno a uno** se non assume mai due volte lo stesso valore; cioè se

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{ogni qualvolta } x_1 \neq x_2$$

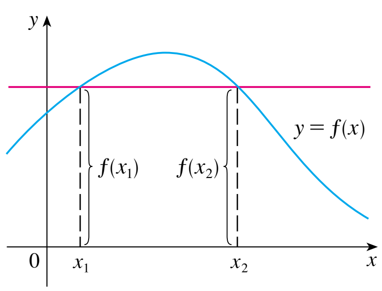


FIGURA 2
Questa funzione non è uno a uno perché $f(x_1) = f(x_2)$

Se una retta orizzontale interseca il grafico di f in più di un punto, allora (Figura 2) esistono almeno due punti x_1 e x_2 tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Ciò significa che f non è uno a uno.

Test delle linee orizzontali Una funzione è uno a uno se e solo se nessuna retta orizzontale la interseca in più di un punto.

ESEMPIO 1 La funzione $f(x) = x^3$ è uno a uno.

SOLUZIONE 1 Se $x_1 \neq x_2$, allora $x_1^3 \neq x_2^3$ (due numeri diversi non possono avere lo stesso cubo). Perciò, per la Definizione 1, $f(x) = x^3$ è uno a uno.

SOLUZIONE 2 Dalla Figura 3 si deduce che nessuna retta orizzontale interseca il grafico di $f(x) = x^3$ più di una volta. Perciò, grazie al Test delle linee orizzontali, possiamo concludere che f è uno a uno.

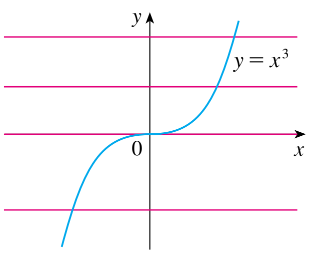


FIGURA 3
$f(x) = x^3$ è uno a uno

ESEMPIO 2 La funzione $g(x) = x^2$ è uno a uno?

SOLUZIONE 1 Questa funzione non è uno a uno essendo

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

Perciò 1 e -1 hanno la stessa immagine.

SOLUZIONE 2 Dalla Figura 4 si ricava che esistono rette orizzontali che intersecano il grafico in più di un punto, perciò per il Test delle linee orizzontali, la funzione non è uno a uno.

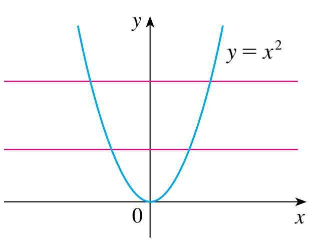


FIGURA 4
$g(x) = x^2$ non è uno a uno

Le funzioni uno a uno sono importanti perché sono proprio quelle funzioni che hanno inversa, secondo la definizione seguente.

2 Definizione Sia f una funzione uno a uno di dominio A e immagine B. Allora la **funzione inversa** f^{-1} ha dominio B e immagine A ed è definita da

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

per ogni y in B.

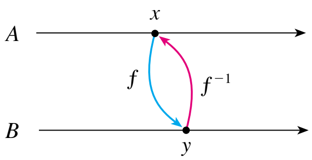


FIGURA 5

Questa definizione dice che se f fa corrispondere y a x, allora f^{-1} fa corrispondere x a y. (Se f non fosse uno a uno, f^{-1} non sarebbe definita univocamente.) Il diagramma a frecce della Figura 5 indica che f^{-1} inverte l'effetto di f. Si osservi che

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{dominio di } f^{-1} = \text{immagine di } f \\ \text{immagine di } f^{-1} = \text{dominio di } f \end{array}}$$

Per esempio, la funzione inversa di $f(x) = x^3$ è $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ perché se $y = x^3$, allora

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

ATTENZIONE • Non si confonda il -1 di f^{-1} con un esponente. Infatti

$$f^{-1}(x) \quad \textit{non significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

Il reciproco $1/f(x)$ potrà semmai essere indicato con $[f(x)]^{-1}$.

ESEMPIO 3 Se $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ e $f(8) = -10$, trovare $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(-10)$.

SOLUZIONE Dalla definizione di f^{-1} abbiamo

$$f^{-1}(7) = 3 \qquad \text{perché} \qquad f(3) = 7$$

$$f^{-1}(5) = 1 \qquad \text{perché} \qquad f(1) = 5$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \qquad \text{perché} \qquad f(8) = -10$$

Il diagramma di Figura 6 evidenzia come f^{-1} inverta l'effetto di f in questo caso.

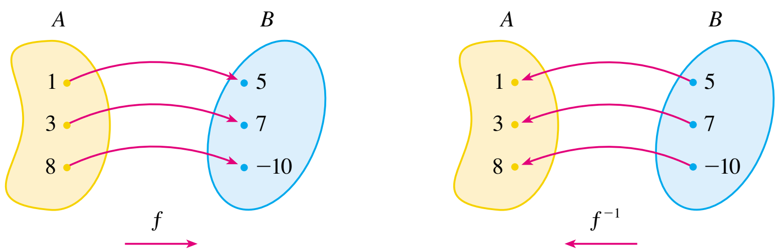


FIGURA 6
La funzione inversa ribalta ingresso e uscita.

La lettera x viene tradizionalmente usata per indicare la variabile indipendente, perciò quando ci concentriamo su f^{-1} piuttosto che su f possiamo scambiare il ruolo di x e di y nella Definizione 2 e avere

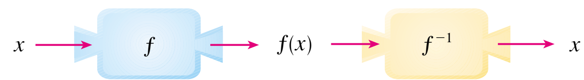
3 $$\boxed{f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x}$$

Sostituendo y nella Definizione 2 e x nella (3), otteniamo le seguenti **equazioni di cancellazione**:

4
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{per ogni } x \in A$$
$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{per ogni } x \in B$$

La prima equazione evidenzia che se partiamo da x, applichiamo f, quindi applichiamo f^{-1}, allora torniamo in x, qualunque esso fosse (si veda il diagramma ingresso-uscita in Figura 7). Si può dire che f^{-1} disfa ciò che f ha fatto. La seconda equazione dice che anche f disfa ciò che f^{-1} ha fatto.

FIGURA 7



Per esempio, se $f(x) = x^3$, allora le equazioni di cancellazione diventano

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Queste equazioni semplicemente affermano che il cubo e la radice cubica hanno effetti che si annullano quando applicate in successione.

Ora occupiamoci del calcolo delle funzioni inverse. Se è data una funzione $y = f(x)$ e siamo in grado di risolvere questa equazione per x in funzione di y, allora, secondo la Definizione 2, deve essere $x = f^{-1}(y)$. Se poi vogliamo chiamare x la variabile indipendente, possiamo scambiare x e y e avere $y = f^{-1}(x)$.

5 Come trovare la funzione inversa di una funzione uno a uno f

PASSO 1 Scrivere $y = f(x)$.

PASSO 2 Risolvere questa equazione per x in funzione di y (se possibile).

PASSO 3 Esprimere f^{-1} come funzione di x, scambiando x e y per ottenere $y = f^{-1}(x)$.

ESEMPIO 4 Trovare la funzione inversa di $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUZIONE Seguendo le istruzioni date in (5), abbiamo

$$y = x^3 + 2$$

Quindi risolviamo questa equazione per x:

$$x^3 = y - 2$$
$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

In fine, scambiando x e y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

Perciò la funzione inversa è $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$. ■

▲ Si osservi come f^{-1} annulli l'effetto di f. Se, nell'Esempio 4, f dice "fa il cubo, quindi aggiungi 2"; f^{-1} dice "sottrai 2, quindi estrai la radice cubica".

Lo scambio effettuato tra x e y per trovare la funzione inversa illustra il metodo per ottenere il grafico di f^{-1} da quello di f. Poiché $f(a) = b$ se e solo se $f^{-1}(b) = a$, il punto

(a, b) appartiene al grafico di f se e solo se (b, a) appartiene a quello di f^{-1}. Il punto (b, a) si ottiene da (a, b) per riflessione rispetto alla retta $y = x$ (Figura 8).

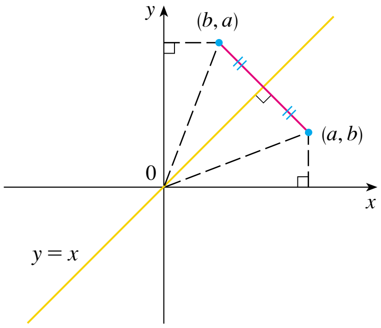


FIGURA 8

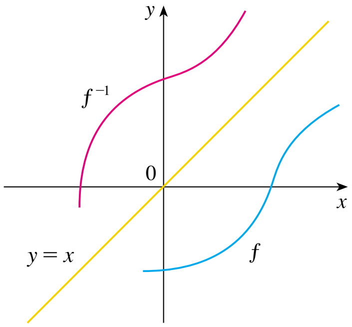


FIGURA 9

Perciò, come mostrato in Figura 9:

> Il grafico di f^{-1} si ottiene da quello di f per riflessione rispetto alla retta $y = x$.

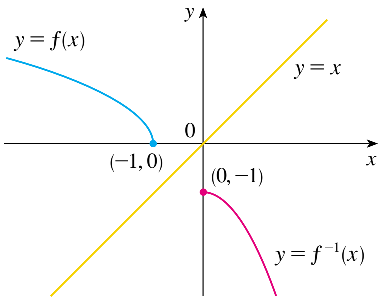


FIGURA 10

ESEMPIO 5 Disegnare i grafici di $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ e della sua inversa, usando il medesimo sistema di assi coordinati.

SOLUZIONE Disegniamo la curva $y = \sqrt{-1 - x}$ (la metà superiore della parabola $y^2 = -1 - x$, ossia $x = -y^2 - 1$) quindi riflettiamo rispetto alla retta $y = x$ per avere il grafico di f^{-1} (Figura 10). Come conferma, si osservi che l'espressione di f^{-1} è $f^{-1}(x) = -x^2 - 1, x \geqslant 0$. Il grafico di f^{-1} è la metà destra della parabola $y = -x^2 - 1$ (Figura 10).

Funzioni logaritmiche

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ o è crescente o è decrescente, e perciò è uno a uno. Ammette dunque inversa f^{-1}, che chiamiamo **funzione logaritmica di base *a*** e indichiamo con $\log_a$. Se usassimo la notazione della funzione inversa introdotta con la (3),

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

avremmo

6
$$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

Perciò, se $x > 0$, $\log_a x$ è l'esponente al quale bisogna elevare a per ottenere x. Per esempio, $\log_{10} 0.001 = -3$ perché $10^{-3} = 0.001$.

Le equazioni di cancellazione (4) applicate a $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$ diventano

7
$$\boxed{\begin{aligned} \log_a(a^x) &= x \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} &= x \qquad \text{per ogni } x > 0 \end{aligned}}$$

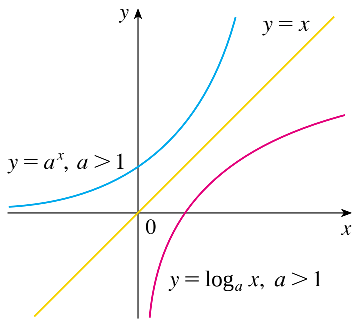


FIGURA 11

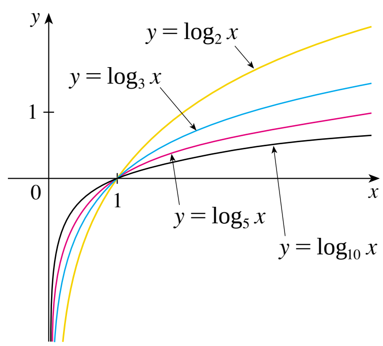


FIGURA 12

La funzione logaritmica $\log_a$ ha dominio $(0, +\infty)$ e immagine $\mathbb{R}$. Il suo grafico è il simmetrico rispetto alla retta $y = x$ del grafico di $y = a^x$.

La Figura 11 mostra il caso in cui $a > 1$. (Le funzioni logaritmiche più importanti hanno base maggiore di 1.) Il fatto che $y = a^x$ sia una funzione che cresce molto rapidamente per $x > 0$ fa sì che $y = \log_a x$ sia una funzione che cresce molto lentamente per $x > 1$.

La Figura 12 mostra il grafico di $y = \log_a x$ per diversi valori della base a. Poiché $\log_a 1 = 0$, il grafico di tutte le funzioni logaritmiche passa per il punto $(1, 0)$.

Le seguenti proprietà delle funzioni logaritmiche sono una diretta conseguenza delle corrispondenti proprietà delle funzioni esponenziali presentate nel Paragrafo 1.5.

Proprietà dei logaritmi Se x e y sono numeri positivi, allora

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$ (dove r è un numero reale)

ESEMPIO 6 Usare le proprietà dei logaritmi per calcolare $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUZIONE Con la Proprietà 2, si ha

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

essendo $2^4 = 16$.

Logaritmi naturali

▲ **Notazione per i logaritmi**

In alcuni testi $\ln x$ sta per logaritmo naturale, mentre $\log x$ sottintende un logaritmo in base 10, ma è oramai molto comune usare la scrittura $\log x$ anche per i logaritmi naturali.

Come vedremo nel Capitolo 3, tra tutte le possibili scelte per la base a di un logaritmo la più conveniente risulta essere il numero e, definito nel Paragrafo 1.5. Il logaritmo in base e è detto **logaritmo naturale** e ha una sua propria notazione:

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

Se poniamo $a = e$ e $\log_e = \ln$ nella (6) e nella (7), allora la definizione di logaritmo naturale diventa

8 $$\boxed{\ln x = y \iff e^y = x}$$

9 $$\boxed{\begin{aligned} \ln(e^x) &= x \qquad x \in \mathbb{R} \\ e^{\ln x} &= x \qquad x > 0 \end{aligned}}$$

In particolare, se poniamo $x = 1$, otteniamo

$$\boxed{\ln e = 1}$$

ESEMPIO 7 Trovare x tale che $\ln x = 5$.

SOLUZIONE 1 Dalla (8) abbiamo che

$$\ln x = 5 \qquad \text{significa} \qquad e^5 = x$$

Perciò, $x = e^5$.

(Se la notazione "ln" dovesse creare dei problemi, la si sostituisca con l'equivalente $\log_e$. L'equazione diventa allora $\log_e x = 5$; per definizione di logaritmo, $e^5 = x$.)

SOLUZIONE 2 Partiamo dall'equazione

$$\ln x = 5$$

e applichiamo la funzione esponenziale a entrambi i membri

$$e^{\ln x} = e^5$$

Per la seconda equazione di cancellazione (9) si ha $e^{\ln x} = x$. Perciò, $x = e^5$. ■

ESEMPIO 8 Risolvere l'equazione $e^{5-3x} = 10$.

SOLUZIONE Applichiamo il logaritmo naturale a entrambi i membri dell'equazione, e usiamo la (9):

$$\begin{aligned} \ln(e^{5-3x}) &= \ln 10 \\ 5 - 3x &= \ln 10 \\ 3x &= 5 - \ln 10 \\ x &= \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10) \end{aligned}$$

Poiché il logaritmo naturale può essere calcolato con una calcolatrice scientifica, otteniamo, approssimando la soluzione alla quarta cifra decimale $x \approx 0.8991$. ■

ESEMPIO 9 Esprimere $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ come un singolo logaritmo.

SOLUTZIONE Con le Proprietà dei logaritmi 3 e 1 si ricava

$$\begin{aligned} \ln a + \tfrac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln b^{1/2} \\ &= \ln a + \ln\sqrt{b} \\ &= \ln\left(a\sqrt{b}\right) \end{aligned}$$ ■

La formula seguente esprime la possibilità di tradurre un logaritmo in una base qualunque in un logaritmo naturale.

10 Dato un qualunque numero positivo a ($a \neq 1$), si ha

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Dimostrazione Sia $y = \log_a x$. Allora, dalla (6), si ricava che $a^y = x$. Calcolando il logaritmo naturale di entrambi i membri di questa equazione si ottiene $y \ln a = \ln x$. Perciò

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Le calcolatrici scientifiche hanno un tasto che permette di calcolare il logaritmo naturale di un numero; con la Formula 10 siamo dunque in grado di calcolare il logaritmo in una base qualunque (come mostrato nel prossimo esempio). Analogamente la Formula 10 permette di disegnare una funzione logaritmica in qualunque base a partire dal logaritmo naturale (Esercizi 43 e 44).

ESEMPIO 10 Calcolare $\log_8 5$ corretto alle prime sei cifre decimali.

SOLUZIONE La Formula 10 dà

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.773976$$

ESEMPIO 11 Nell'Esempio 3 del Paragrafo 1.5 si è mostrato che la massa rimanente di 24 mg di ^{90}Sr dopo t anni è $m = f(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$. Trovare la funzione inversa di questa funzione e darne una interpretazione.

SOLUZIONE È necessario risolvere l'equazione $m = 24 \cdot 2^{-t/25}$ rispetto a t. Isoliamo l'esponenziale e calcoliamo il logaritmo naturale di entrambi i membri:

$$2^{-t/25} = \frac{m}{24}$$

$$\ln(2^{-t/25}) = \ln\left(\frac{m}{24}\right)$$

$$-\frac{t}{25}\ln 2 = \ln m - \ln 24$$

$$t = -\frac{25}{\ln 2}(\ln m - \ln 24) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln m)$$

Perciò la funzione inversa è

$$f^{-1}(m) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln m)$$

Questa funzione esprime il tempo necessario affinché la massa si riduca a m milligrammi. In particolare, il tempo necessario affinché la massa si riduca a 5 milligrammi è

$$t = f^{-1}(5) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln 5) \approx 56.58 \text{ anni}$$

Questo risultato è in accordo con la stima data nell'Esempio 3 del Paragrafo 1.5.

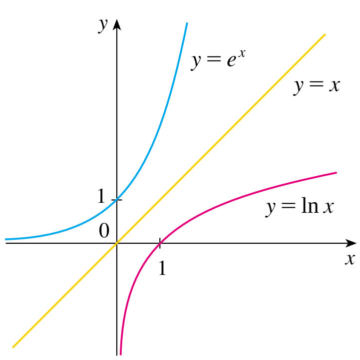


FIGURA 13

La Figura 13 riporta i grafici della funzione esponenziale $y = e^x$ e della sua funzione inversa, il logaritmo naturale. Poiché la curva $y = e^x$ interseca l'asse y con pendenza 1, ne segue che la curva riflessa $y = \ln x$ attraversa l'asse x con pendenza pari a 1.

Così come tutte le altre funzioni logaritmiche con base maggiore di 1, il logaritmo naturale è una funzione crescente definita su $(0, +\infty)$ e ha come asintoto verticale l'asse y. (Ciò significa che i valori di $\ln x$ diventano numeri negativi sempre più grandi in modulo per x che si avvicina a 0).

ESEMPIO 12 Disegnare il grafico della funzione $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUZIONE Il grafico di $y = \ln x$ è dato in Figura 13; usando le trasformazioni presentate nel Paragrafo 1.3, possiamo traslarlo di due unità verso destra ottenendo $y = \ln(x - 2)$, quindi verso il basso di una unità per avere $y = \ln(x - 2) - 1$ (Figura 14).

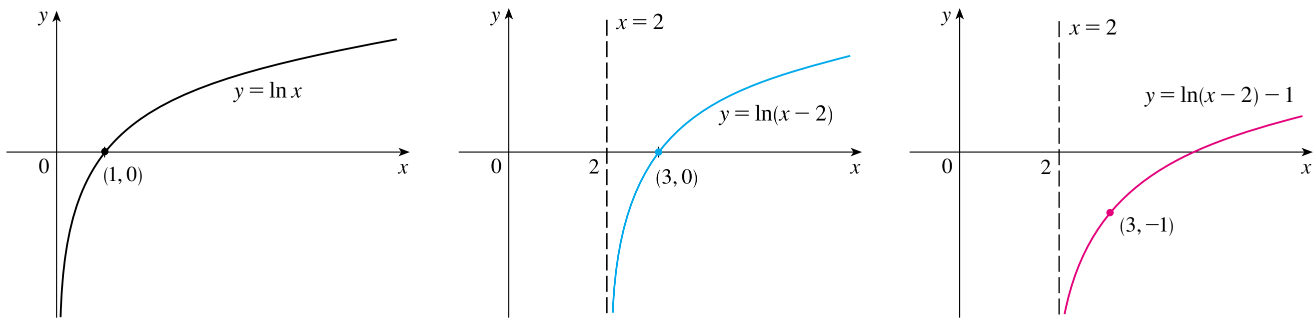


FIGURA 14 ■

Sebbene $\ln x$ sia una funzione crescente, cresce *molto* lentamente quando $x > 1$. In effetti, cresce molto più lentamente di una qualunque potenza di x; per mostrare questo fatto, confrontiamo i grafici delle funzioni $y = \ln x$ e $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ nelle Figure 17 e 18 e i loro valori approssimati nella tabella seguente. Inizialmente i due grafici crescono con pendenza confrontabile, ma per grandi valori di x la radice sorpassa decisamente il logaritmo.

x	1	2	5	10	50	100	500	1000	10000	100000
$\ln x$	0	0.69	1.61	2.30	3.91	4.6	6.2	6.9	9.2	11.5
$\sqrt{x}$	1	1.41	2.24	3.16	7.07	10.0	22.4	31.6	100	316
$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0.49	0.72	0.73	0.55	0.46	0.28	0.22	0.09	0.04

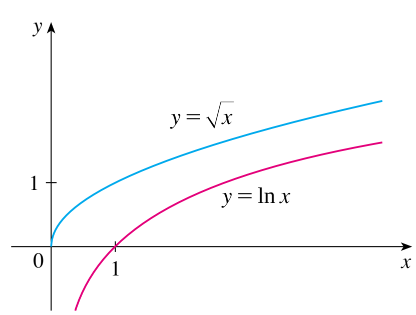


FIGURA 15

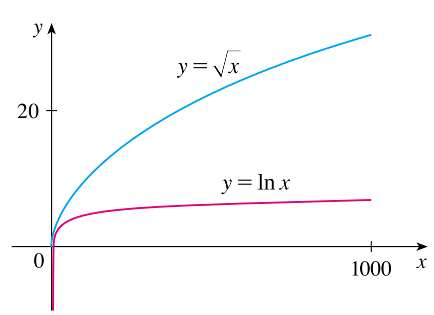


FIGURA 16

1.6 Esercizi

1. (a) Cos'è una funzione uno a uno?
(b) Come si può capire dal grafico di una funzione se questa è uno a uno?

2. (a) Si supponga che f sia una funzione uno a uno di dominio A e immagine B. Come è definita la funzione inversa f^{-1}? Qual è il suo dominio e quale la sua immagine?
(b) Conoscendo la formula che esprime f come si trova quella per f^{-1}?
(c) Dal grafico di f come si ricava quello di f^{-1}?

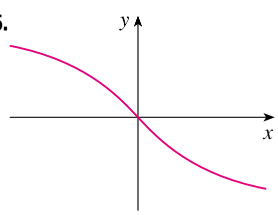
3–14 ■ Una funzione f viene assegnata con un grafico, o con una tabella di valori, o tramite una descrizione o con una formula. Determinare se f è uno a uno.

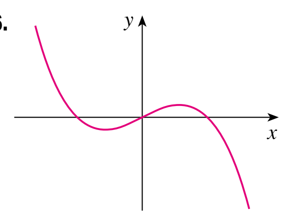
3.

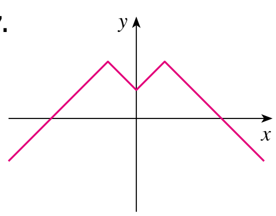
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

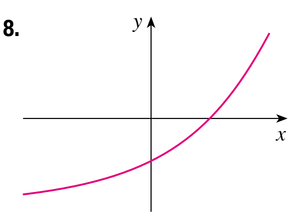
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	4	8	16	32

5.


6.


7.


8.


9. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$

10. $f(x) = 1 + 4x - x^2$

11. $g(x) = |x|$

12. $g(x) = \sqrt{x}$

13. $f(t)$ è la distanza dal suolo di un pallone dopo essere stato calciato.

14. $f(t)$ è l'altezza di una persona all'età t.

15–16 ■ Disegnare il grafico per capire se f è uno a uno.

15. $f(x) = x^3 - x$

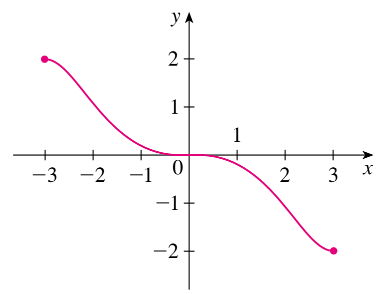
16. $f(x) = x^3 + x$

17. Se f è una funzione uno a uno tale che $f(2) = 9$, quanto vale $f^{-1}(9)$?

18. Sia $f(x) = 3 + x^2 + \tan(\pi x/2)$, con $-1 < x < 1$.
(a) Trovare $f^{-1}(3)$.
(b) Trovare $f(f^{-1}(5))$.

19. Se $g(x) = 3 + x + e^x$, trovare $g^{-1}(4)$.

20. È assegnato il grafico di f.
(a) Perché f è uno a uno?
(b) Determinare il dominio e il codominio di f^{-1}.
(c) Stimare il valore di $f^{-1}(1)$.



21. La formula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, dove $F \geqslant -459.67$, esprime la temperatura in gradi Celsius C come funzione della temperatura in gradi Fahrenheit F. Trovare la funzione inversa e interpretarla. Qual è il suo dominio?

22. Nella teoria della relatività la massa di una particella con velocità v è

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

dove m_0 è la massa a riposo e c è la velocità della luce nel vuoto. Trovare la funzione inversa e spiegarne il significato.

23–28 ■ Trovare l'espressione della funzione inversa per le formule assegnate.

23. $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$

24. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

25. $f(x) = e^{x^3}$

26. $y = 2x^3 + 3$

27. $y = \ln(x + 3)$

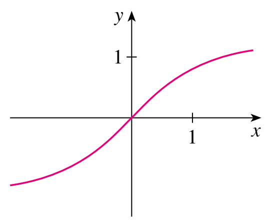
28. $y = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$

29–30 ■ Trovare una formula esplicita per f^{-1} e disegnare quindi su una stessa schermata f^{-1}, f e la retta $y = x$. Come controllo verificare la simmetria dei grafici rispetto alla retta $y = x$.

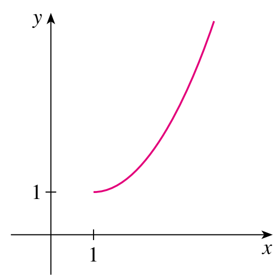
29. $f(x) = 1 - 2/x^2, \quad x > 0$

30. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}, \quad x > 0$

31. Usare il grafico di f per disegnare quello di f^{-1}.



32. Usare il grafico di f per disegnare quello di f^{-1} e di $1/f$.



33. (a) Come è definita la funzione logaritmo?
(b) Qual è il suo dominio?
(c) Qual è l'immagine di questa funzione?
(d) Disegnare il grafico di $y = \log_a x$ se $a > 1$.

34. (a) Cosa è un logaritmo naturale?
(b) Cosa è un logaritmo?
(c) Disegnare il grafico del logaritmo naturale e dell'esponenziale naturale.

35–38 ■ Calcolare il valore esatto di ciascuna espressione.

35. (a) $\log_2 64$ (b) $\log_6 \frac{1}{36}$

36. (a) $\log_8 2$ (b) $\ln e^{\sqrt{2}}$

37. (a) $\log_{10} 1.25 + \log_{10} 80$
(b) $\log_5 10 + \log_5 20 - 3\log_5 2$

38. (a) $2^{(\log_2 3 + \log_2 5)}$ (b) $e^{3\ln 2}$

39–40 ■ Ridurre le seguenti espressioni a un singolo logaritmo.

39. $2\ln 4 - \ln 2$ **40.** $\ln x + a\ln y - b\ln z$

41. Usare la Formula 10 per valutare ogni logaritmo corretto sino alla sesta cifra decimale.
(a) $\log_2 5$ (b) $\log_5 26.05$

42. Trovare il dominio e il rango della funzione $g(x) = \ln(4 - x^2)$.

43–44 ■ Usare la Formula 10 per disegnare in una stessa schermata le funzioni assegnate. Come sono legate tra loro?

43. $y = \log_{1.5} x$, $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{50} x$

44. $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = e^x$, $y = 10^x$

45. Si supponga di disegnare il grafico di $y = \log_2 x$ in una griglia che ha un pollice come unità di misura. Di quante miglia occorre spostarsi sulla destra perché il logaritmo raggiunga un'altezza di 3 ft?

46. Confrontare le funzioni $f(x) = x^{0.1}$ e $g(x) = \ln x$ disegnandole in più schermate. Quando il grafico di f supera definitivamente quello di g?

47–48 ■ Disegnare il grafico di ogni funzione senza usare la calcolatrice, ma solo le trasformazioni spiegate nel Paragrafo 1.3 o i grafici delle Figure 12 e 13.

47. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

48. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln|x|$

49–52 ■ Risolvere le equazioni rispetto a x.

49. (a) $2\ln x = 1$ (b) $e^{-x} = 5$

50. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$ (b) $\ln(5 - 2x) = -3$

51. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

52. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, where $a \neq b$

53–54 ■ Risolvere le disequazioni rispetto a x.

53. (a) $e^x < 10$ (b) $\ln x > -1$

54. (a) $2 < \ln x < 9$ (b) $e^{2-3x} > 4$

CAS **55.** Disegnare la funzione $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ e spiegare perché è uno a uno. Quindi usare un CAS per trovare una espressione esplicita di f^{-1}. (Il programma darà tre possibili risultati; due non sono rilevanti in questo contesto. Spiegare perché.)

CAS **56.** (a) Se $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geq 0$, usare un CAS per trovare l'espressione esplicita di $g^{-1}(x)$.
(b) Usare la risposta data in (a) per disegnare $y = g(x)$, $y = x$, $y = g^{-1}(x)$ sulla stessa schermata.

57. Se una popolazione di batteri, inizialmente di 100 individui, raddoppia ogni tre ore, il numero di batteri dopo t ore è $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$ (Esercizio 23, Paragrafo 1.5).
(a) Trovare la funzione inversa e spiegarne il significato.
(b) Quando la popolazione raggiunge quota 50 000?

58. Quando si scatta una fotografia con un flash, le batterie ricominciano immediatamente a caricare il condensatore del flash con una carica elettrica che è data da

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(Q_0 è la massima capacità di carica e t è espresso in secondi.)
(a) Trovare la funzione inversa e spiegarne il significato.
(b) Quanto tempo è necessario per ricaricare il 90% della capacità se $a = 2$?

59. Partendo dal grafico di $y = \ln x$, trovare l'equazione del grafico risultante dopo
(a) una traslazione di tre unità verso l'alto
(b) una traslazione di tre unità verso sinistra
(c) una riflessione rispetto all'asse x
(d) una riflessione rispetto all'asse y
(e) una riflessione rispetto alla retta $y = x$
(f) una riflessione rispetto all'asse x e quindi rispetto alla retta x
(g) una riflessione rispetto all'asse y e quindi rispetto alla retta x
(h) una traslazione di tre unità verso sinistra e quindi una riflessione rispetto alla retta x

60. (a) Se si trasla una funzione a sinistra, cosa accade alla funzione che le è simmetrica rispetto alla retta $y = x$? Si analizzi questo principio geometrico trovando un'espressione per la funzione inversa della $g(x) = f(x + c)$, dove f è una funzione uno a uno.
(b) Trovare l'espressione della funzione inversa di $h(x) = f(cx)$, dove $c \neq 0$.

1.7 Curve parametriche

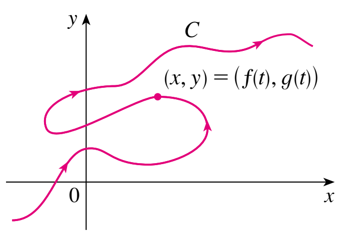


FIGURA 1

Si immagini una particella che si muove lungo la curva C, disegnata in Figura 1. È impossibile descrivere C con un'equazione della forma $y = f(x)$ poiché C non soddisfa il Test delle linee verticali. Ma le coordinate x e y della particella sono funzioni del tempo, quindi è possibile scrivere $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Una coppia di equazioni come queste costituisce un modo talvolta estremamente conveniente per descrivere una curva e giustifica la seguente definizione.

Si supponga che sia x sia y siano assegnate come funzioni di una terza variabile t (detta **parametro**) dalle equazioni

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

(dette **equazioni parametriche**). Ogni valore di t determina un punto (x, y), che è possibile individuare su un piano cartesiano. Al variare di t, il punto $(x,y) = (f(t), g(t))$ si muove e descrive una curva C, che viene detta **curva parametrica**. Il parametro t non rappresenta necessariamente il tempo e, in effetti, si potrebbe usare anche un'altra lettera per indicarlo. Tuttavia in molte applicazioni delle curve parametriche il parametro t ha il significato fisico di tempo ed è possibile interpretare $(x,y) = (f(t), g(t))$ come la posizione di una particella all'istante t.

ESEMPIO 1 Disegnare e riconoscere la curva definita dalle equazioni parametriche

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1$$

SOLUZIONE Ogni valore di t assegna un punto sulla curva, come mostrato nella tabella. Per esempio, se $t = 0$, allora $x = 0$, $y = 1$ e dunque il punto corrispondente è (0,1). Nella Figura 2 disegniamo i punti (x,y) determinati da diversi valori del parametro e li colleghiamo per produrre una curva.

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

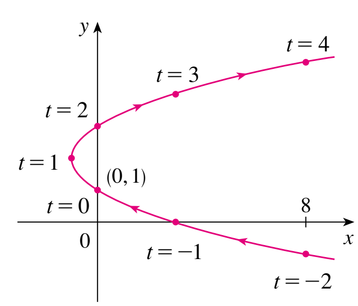


FIGURA 2

Una particella la cui posizione sia assegnata dalle equazioni parametriche si muove lungo la curva nella direzione della freccia al crescere del tempo. Si osservi che i punti consecutivi evidenziati sulla curva compaiono a intervalli di tempo uguali, ma non sono equispaziati. Questo accade perché la particella prima rallenta, poi accelera, al crescere del tempo.

Dalla Figura 2 si evince anche che la curva descritta dalla particella può essere una parabola. Ciò viene confermato eliminando il parametro t dalle equazioni, come segue. Si ricava $t = y - 1$ dalla seconda equazione e la si sostituisce nella prima. Si ottiene

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

Perciò la curva rappresentata dalle equazioni parametriche è effettivamente la parabola $x = y^2 - 4y + 3$. ■

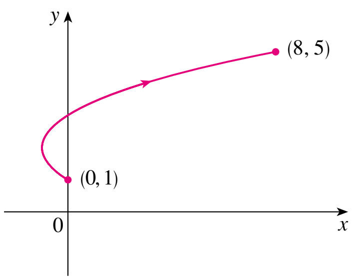


FIGURA 3

Nell'Esempio 1 non erano imposte limitazioni al parametro t, perciò si assumeva che t potesse essere un qualunque numero reale. Talvolta si impone al parametro di assumere solo valori appartenenti a un determinato intervallo finito. Per esempio la curva

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4$$

disegnata nella Figura 3 è una parte della parabola dell'Esempio 1, che comincia in corrispondenza del punto $(0, 1)$ e finisce con il punto $(8, 5)$. La freccia indica la direzione nella quale la curva viene tracciata, mentre t assume i valori da 0 a 4.

In generale una curva con equazioni parametriche

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

ha un **punto iniziale** $(f(a), g(a))$ e un **punto finale** $(f(b), g(b))$.

ESEMPIO 2 Quale curva è rappresentata dalle equazioni parametriche $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$?

SOLUZIONE Possiamo eliminare t osservando che

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

perciò il punto (x, y) si muove sulla circonferenza di raggio unitario $x^2 + y^2 = 1$. Si osservi che in questo esempio il parametro t può essere interpretato come l'angolo indicato in Figura 4. Al crescere di t da 0 a 2π, il punto $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ percorre una volta tutta la circonferenza in verso antiorario, partendo dal punto $(1, 0)$.

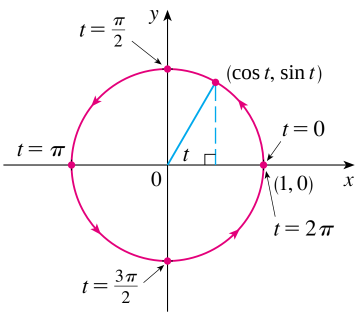


FIGURA 4 ■

ESEMPIO 3 Quale curva è rappresentata dalle equazioni parametriche $x = \sin 2t$, $y = \cos 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$?

SOLUZIONE Anche in questo caso si ha

$$x^2 + y^2 = \sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$$

perciò le equazioni parametriche rappresentano la circonferenza di raggio 1. Ma mentre t cresce da 0 a 2π, il punto $(x, y) = (\sin 2t, \cos 2t)$ parte da $(0, 1)$ e si muove *due* volte sulla circonferenza, girando in senso orario, come indicato in Figura 5.

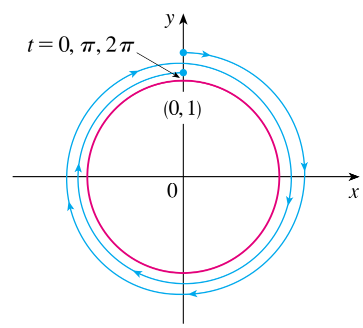


FIGURA 5

Gli Esempi 2 e 3 mostrano che una stessa curva può essere rappresentata da diverse equazioni parametriche, perciò dovremo distinguere tra una *curva*, che è un insieme di punti, e una *curva parametrica*, i cui punti sono tracciati seguendo un particolare ordine.

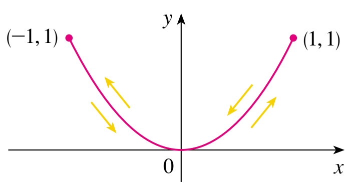


FIGURA 6

ESEMPIO 4 Disegnare la curva di equazioni parametriche $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$.

SOLUZIONE Si osservi che $y = (\sin t)^2 = x^2$ e dunque il punto (x, y) si muove sulla parabola $y = x^2$. Si osservi inoltre che, poiché $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$, abbiamo che $-1 \leqslant x \leqslant 1$, quindi la curva parametrica rappresenta solo la parte di parabola con ascissa che soddisfa la limitazione $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Poiché $\sin t$ è una funzione periodica, il punto $(x, y) = (\sin t, \sin^2 t)$ si muove indefinitamente avanti e indietro lungo la parabola toccando i punti estremi del moto (–1, 1) e (1, 1) (Figura 6).

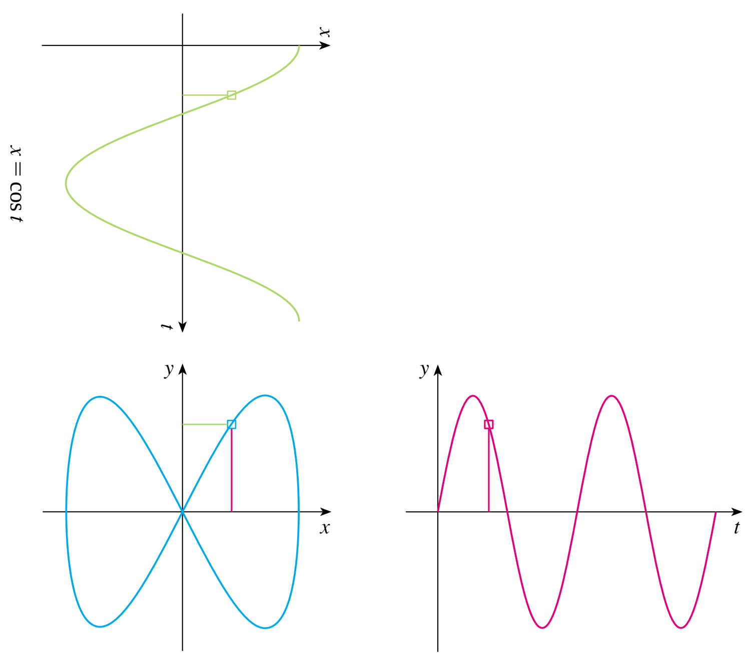


FIGURA 7 $x = \cos t \quad y = \sin 2t$ $\qquad y = \sin 2t$

Programmi grafici

La maggior parte delle calcolatrici scientifiche e dei software di calcolo permettono di disegnare il grafico di curve parametriche. È piuttosto istruttivo osservare come un computer disegna il grafico di una funzione assegnata parametricamente, in quanto i punti della curva vengono disegnati in successione man mano che il parametro assume valori crescenti.

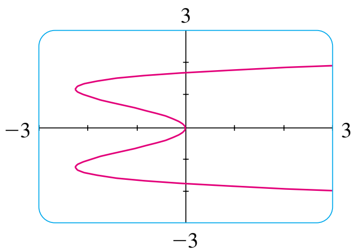


FIGURA 8

ESEMPIO 5 Usare una calcolatrice grafica per disegnare la curva $x = y^4 - 3y^2$.

SOLUZIONE Se poniamo $t = y$, otteniamo le equazioni

$$x = t^4 - 3t^2 \qquad y = t$$

Usando queste equazioni parametriche per disegnare la curva si ottiene la Figura 6. Sarebbe possibile risolvere l'equazione assegnata ($x = y^4 - 3y^2$) rispetto a y, che dunque viene vista come quattro distinte funzioni di x che si possono disegnare separatamente, ma le equazioni parametriche forniscono certamente un metodo più semplice.

In generale, se vogliamo disegnare una curva della forma $x = g(y)$, possiamo usare le equazioni parametriche

$$x = g(t) \qquad y = t$$

Si osservi inoltre che le curve di equazione $y = f(x)$ (i grafici di funzioni, le curve con cui siamo più familiari) possono essere interpretate come le equazioni parametriche

$$\boxed{1} \qquad x = t \qquad y = f(t)$$

Un altro uso delle equazioni parametriche è quello di disegnare le funzioni inverse di funzioni uno a uno. Molti programmi di grafica non disegnano direttamente il grafico di una funzione inversa, ma passano attraverso la sua definizione parametrica. Sappiamo che il grafico di una generica funzione inversa si può ottenere scambiando le coordinate x e y del punto sul grafico di f. Perciò, dalla (1), le equazioni parametriche di f^{-1} sono

$$x = f(t) \qquad y = t$$

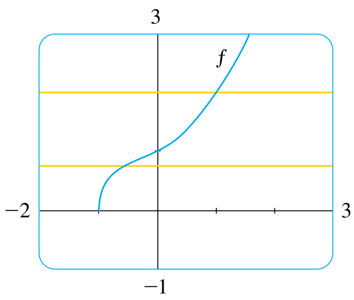


FIGURA 9

ESEMPIO 6 Mostrare che la funzione $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ è uno a uno e disegnare sia f sia f^{-1}.

SOLUZIONE Disegniamo il grafico in Figura 9 e affermiamo che la funzione è uno a uno grazie al Test delle rette orizzontali.

Per disegnare f e f^{-1} sulla stessa schermata, usiamo le equazioni parametriche; quelle di f sono

$$x = t \qquad y = \sqrt{t^3 + t^2 + t + 1}$$

e quelle di f^{-1} sono

$$x = \sqrt{t^3 + t^2 + t + 1} \qquad y = t$$

Disegniamo anche la retta $y = x$:

$$x = t \qquad y = t$$

La Figura 10 riporta i tre grafici. Evidente è che f si può ottenere da f^{-1} per riflessione rispetto alla retta $x = y$.

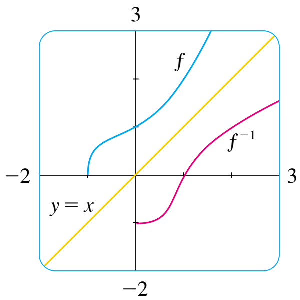


FIGURA 10

I software di calcolo sono indispensabili nello studio di curve complicate. Per esempio, le curve nelle Figure 11 e 12 sarebbero probabilmente impossibili da produrre a mano.

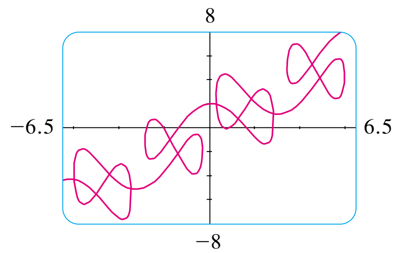


FIGURA 11
$x = t + 2\sin 2t, \ \ y = t + 2\cos 5t$

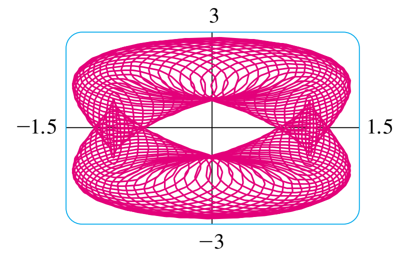


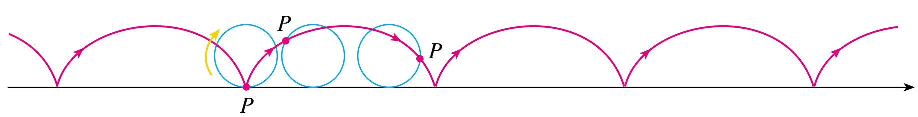
FIGURA 12
$x = \cos t - \cos 80t \sin t, \ \ y = 2\sin t - \sin 80t$

Uno degli esempi eccellenti di grafica computerizzata è rappresentato dal CAD (*Computer Aided Design*). Nel Progetto di laboratorio del Paragrafo 3.5 studieremo delle speciali curve parametriche, le **curve di Bézier**, che sono utilizzate molto spesso nel progetto dell'automazione industriale. Queste curve sono utilizzate anche nelle stampanti laser per specificare la forma delle lettere e di altri simboli.

La cicloide

ESEMPIO 7 La curva tracciata da un punto P sulla circonferenza di un cerchio mentre questo rotola lungo una retta è detta **cicloide** (Figura 13). Se il cerchio ha raggio r e rotola lungo l'asse x e se in un certo istante P passa per l'origine, trovare le equazioni parametriche della cicloide.

FIGURA 13



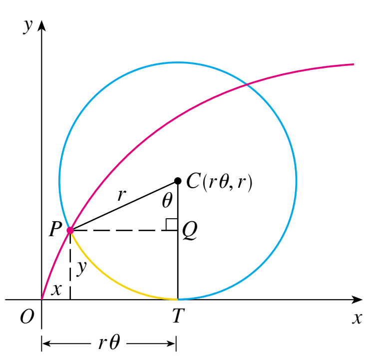


FIGURA 14

SOLUZIONE Scegliamo come parametro l'angolo di rotazione θ del cerchio ($\theta = 0$ quando P è nell'origine). Quando il cerchio è ruotato di θ radianti, poiché è stato a contatto con la retta, si vede dalla figura 14 che la sua distanza dall'origine è

$$|OT| = \text{arc}\,\widehat{PT} = r\theta$$

perciò il centro del cerchio C ha coordinate $(r\theta, r)$. Se (x, y) sono le coordinate di P, allora dalla Figura 14 è chiaro che

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

Le equazioni della cicloide sono dunque

$$\boxed{2} \qquad x = r(\theta - \sin\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Un arco della cicloide deriva da una rotazione del cerchio ed è individuato dalla limitazione $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Le Equazioni 2, sebbene derivate dalla Figura 14, che illustra il caso $0 < \theta < \pi/2$, sono valide anche per ogni altro valore di θ (si veda l'Esercizio 31).

È possibile eliminare il parametro θ dalle Equazioni 2, ma l'equazione cartesiana che ne discende è estremamente complicata e perciò meno conveniente da usare rispetto alle equazioni parametriche.

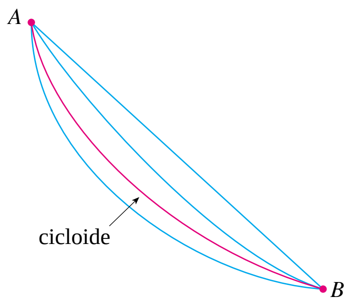


FIGURA 15

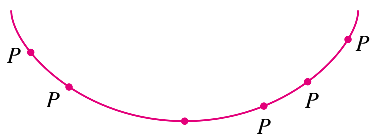


FIGURA 16

Uno dei primi a cimentarsi con lo studio della cicloide fu Galileo, che propose di costruire ponti dalla forma cicloidale e che cercò di trovare l'area delimitata da un arco di cicloide. Più tardi questa curva fu studiata in relazione con il *problema brachistocrono*: trovare la curva lungo la quale una particella (sotto l'influenza del campo gravitazionale) si porta nel minor tempo possibile da un punto A a un punto B, più in basso, ma non verticalmente sotto A. Il matematico svizzero Bernoulli, che propose il problema nel 1696, dimostrò poi che tra tutti i tragitti possibili che congiungono A a B (Figura 15) la particella impiega il minor tempo possibile scivolando da A a B lungo un arco di cicloide invertita.

Il fisico olandese Huygens aveva già mostrato che la cicloide era anche la soluzione del *problema tautocrono*: non importa dove una particella P si trovi lungo un arco di cicloide invertita, essa impiega sempre lo stesso tempo per scivolare sul fondo (Figura 16). Huygens ipotizzò che l'orologio a pendolo, che lui stesso inventò, dovesse oscillare lungo archi cicloidali perché così avrebbe impiegato lo stesso tempo per compiere un'oscillazione completa, sia lungo un arco grande sia lungo uno piccolo.

Famiglie di curve parametriche

ESEMPIO 8 Studiare la famiglia di curve di equazione parametrica

$$x = a + \cos t \qquad y = a \tan t + \sin t$$

Cosa hanno in comune queste curve? Come cambia la loro forma al crescere di a?

SOLUZIONE Usiamo un computer per disegnare il grafico nei casi $a = -2, -1, -0.5, -0.2, 0, 0.5, 1$ e 2 presentati in Figura 17. Si osserva che tutte queste curve (eccettuato il caso $a = 0$) hanno due rami, che si avvicinano entrambi all'asintoto verticale $x = a$ al tendere di x ad a da destra o da sinistra.

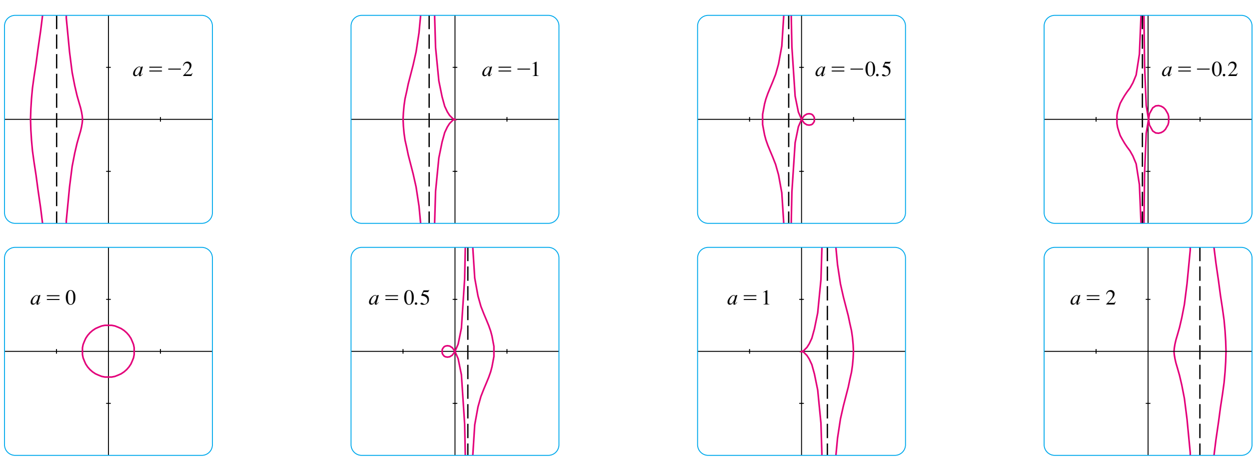


FIGURA 17 Alcune funzioni della famiglia $x = a + \cos t$, $y = a \tan t + \sin t$, in una schermata $[-4, 4]$ per $[-4, 4]$

Quando $a < -1$, entrambi i rami sono regolari, ma quando a raggiunge 1, il ramo di destra forma un angolo acuto, che viene chiamato *cuspide*. Per a tra –1 e 0 la cuspide si trasforma in un anello che diventa più grande al tendere di a a 0. Se $a = 0$ i due rami si uniscono per formare un cerchio (Esempio 2). Per a tra 0 e 1, il ramo sinistro mostra un anello, che si riduce fino a dar luogo alla cuspide quando $a = 1$. Per $a > 1$ i rami sono entrambi regolari, e, crescendo ulteriormente a, diminuiscono la loro curvatura.

Si osservi che le curve con a positivo sono simmetriche rispetto all'asse y delle curve con a negativo.

Queste curve sono dette **concoidi di Nicomede**, dal nome dello studioso greco Nicomede che così le chiamò perché i loro rami esterni ricordano la forma di una conchiglia o il guscio di un mollusco. ■

1.7 Esercizi

1–4 ■ Disegnare la curva assegnata per via parametrica. Indicare con una freccia la direzione di crescita del parametro.

1. $x = 1 + \sqrt{t}, \quad y = t^2 - 4t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 5$

2. $x = 2\cos t, \quad y = t - \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

3. $x = 5\sin t, \quad y = t^2, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$

4. $x = e^{-t} + t, \quad y = e^t - t, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

5–8 ■

(a) Disegnare la curva assegnata per via parametrica. Indicare la direzione di crescita del parametro.

(b) Eliminare il parametro per trovare l'equazione cartesiana.

5. $x = 2t + 4, \quad y = t - 1$

6. $x = t^2, \quad y = 6 - 3t$

7. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

8. $x = t^2, \quad y = t^3$

9–14 ■

(a) Eliminare il parametro per trovare l'equazione cartesiana della curva.

(b) Disegnare la curva indicando la direzione di crescita del parametro.

9. $x = \sin\theta, \quad y = \cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

10. $x = 4\cos\theta, \quad y = 5\sin\theta, \quad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

11. $x = e^t, \quad y = e^{-t}$

12. $x = \ln t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \geqslant 1$

13. $x = \sin^2\theta, \quad y = \cos^2\theta$

14. $x = \sec\theta, \quad y = \tan\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

15–18 ■ Descrivere il moto di una particella di posizione (x, y), mentre t varia nell'intervallo assegnato.

15. $x = \cos \pi t, \quad y = \sin \pi t, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$

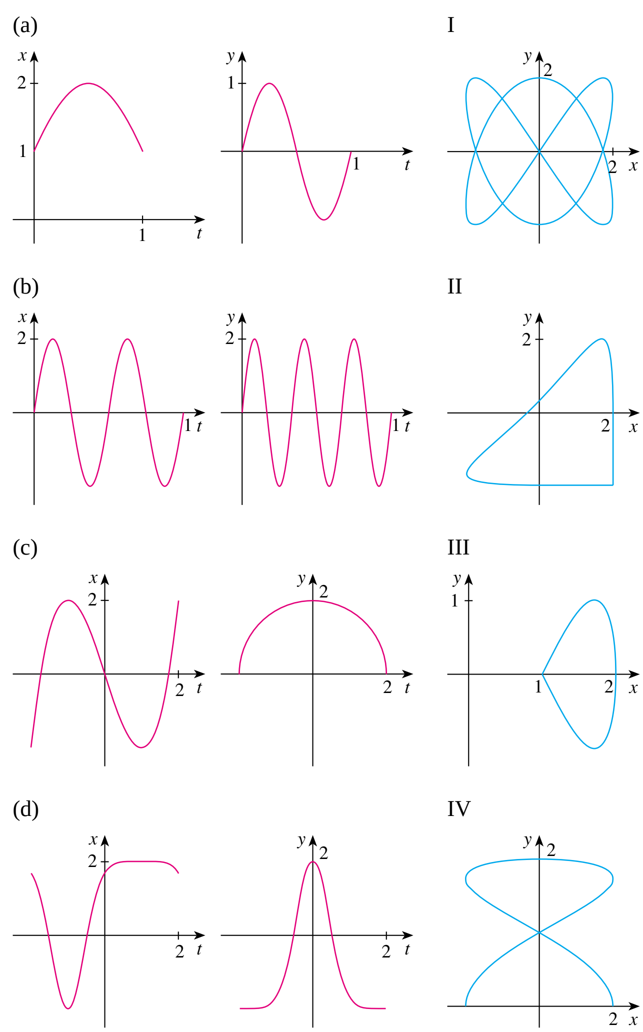
16. $x = 2 + \cos t, \quad y = 3 + \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

17. $x = 2\sin t, \quad y = 3\cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

18. $x = \cos^2 t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi$

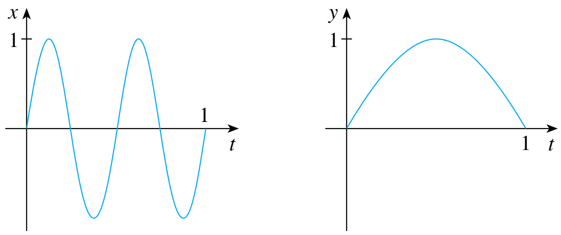
19. Una curva sia assegnata tramite le equazioni parametriche $x = f(t)$, $y = g(t)$; l'immagine di f sia $[1, 4]$ e quella di g sia $[2, 3]$. Cosa si può concludere sul grafico della curva?

20. Associare i grafici delle equazioni parametriche con quelli delle curve cartesiane corrispondenti, giustificando la risposta.

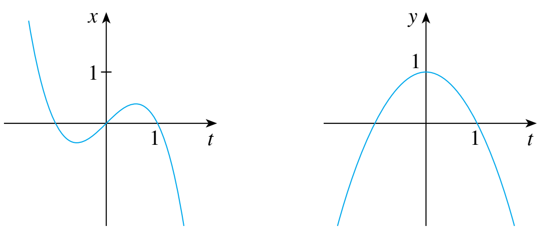


21–22 Usare i grafici di $x = f(t)$ e di $y = g(t)$ per disegnare il grafico cartesiano della curva parametrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, indicando con una freccia la direzione di crescita del parametro.

21.



22.



23. (a) Mostrare che le equazioni parametriche

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \qquad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

con $0 \leqslant t \leqslant 1$, descrivono il segmento che unisce il punto $P_1(x_1, y_1)$ con $P_2(x_2, y_2)$.

(b) Trovare le equazioni parametriche che rappresentano il segmento che va da $(-2, 7)$ a $(3, -1)$.

24. Usare il risultato dell'Esercizio 23 per disegnare un triangolo di vertici $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ e $C(1, 5)$.

25. Disegnare la curva $x = y - 3y^3 + y^5$.

26. Disegnare le curve $y = x^5$ e $x = y(y - 1)^2$ per trovare i loro punti di intersezione, corretti alla prima cifra decimale.

27. Trovare le equazioni parametriche di una particella che si muove lungo la curva $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ nei modi seguenti:

(a) compiendo un solo giro orario, partendo da $(2, 1)$

(b) compiendo tre giri in senso antiorario, partendo da $(2, 1)$

(c) compiendo mezzo giro antiorario, partendo da $(0, 3)$

28. Disegnare il semicerchio tracciato dalla particella dell'Esercizio 27(c).

29. (a) Trovare l'equazione parametrica dell'ellisse di equazione $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. [*Suggerimento*: si modifichi l'equazione del cerchio dell'Esempio 2.]

(b) Usare la forma parametrica trovata per disegnare l'ellisse con $a = 3$ e $b = 1, 2, 4$ e 8.

(c) Come cambia la forma dell'ellisse al variare di b?

30. Un proiettile viene sparato da un cannone con una velocità iniziale di v_0 metri al secondo e con un angolo α rispetto all'orizzontale; la resistenza dell'aria si assume essere trascurabile. Allora le equazioni parametriche del moto sono

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \sin \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

dove g è l'accelerazione di gravità (9.8 m/s^2).

(a) Se un proiettile viene sparato con $v_0 = 500$ m/s e $\alpha = 30°$, quando il proiettile colpisce il terreno? A che distanza dal punto di partenza? Qual è la massima altezza che il proiettile raggiunge?

(b) Usare una simulazione grafica per verificare le risposte alla domanda (a). Quindi ripetere la simulazione per diversi valori di α osservando la distanza tra il cannone e il punto in cui il proiettile raggiunge terra. Commentare i risultati.

(c) Mostrare che la traiettoria è una parabola, eliminando il parametro t dalle equazioni.

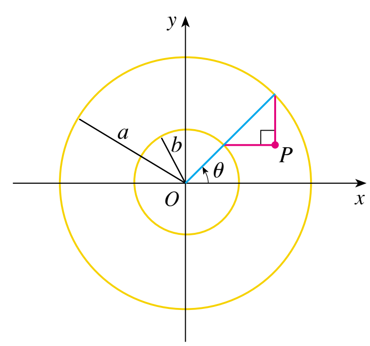
31. Dedurre le Equazioni 2 nel caso $\pi/2 < \theta < \pi$.

32. Sia P un punto a distanza d dal centro di un cerchio di raggio r. La curva tracciata dal punto P mentre il cerchio rotola lungo una retta è detta **trocoide**. (Si pensi al moto di un punto su un raggio di una bicicletta.) La cicloide è una particolare trocoide con $d = r$. Usando lo stesso parametro θ utilizzato per la cicloide, pensando che il cerchio rotoli sull'asse x e che $\theta = 0$ quando P raggiunge uno dei punti di minimo, provare che le equazioni parametriche della trocoide sono

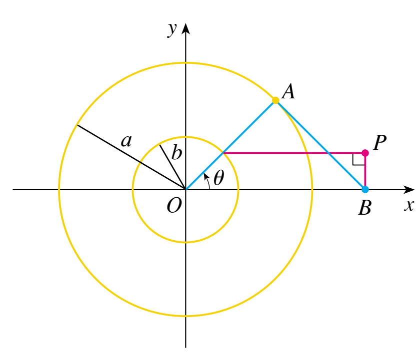
$$x = r\theta - d \sin \theta \qquad y = r - d \cos \theta$$

Disegnare la trocoide nei casi $d < r$ e $d > r$.

33. Se a e b sono numeri assegnati, trovare le equazioni parametriche dell'insieme di tutti i punti P determinati nel modo esposto in figura, usando l'angolo θ come parametro. Quindi riconoscere la curva eliminando il parametro dalle equazioni.



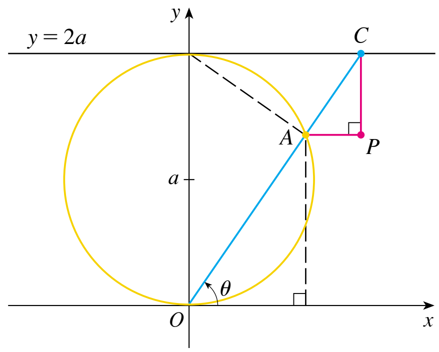
34. Se a e b sono numeri assegnati, trovare le equazioni parametriche dell'insieme di tutti i punti P determinati nel modo esposto in figura, usando l'angolo θ come parametro. Il segmento AB è tangente al cerchio più ampio.



35. Una curva, chiamata la **strega dell'Agnesi**, è costituita da tutti i punti P determinati nel modo esposto in figura. Mostrare che le equazioni parametriche di questa curva possono essere scritte come

$$x = 2a \cot \theta \qquad y = 2a \sin^2\theta$$

Disegnare la curva.



36. Si supponga che la posizione di una particella al tempo t sia data da

$$x_1 = 3 \sin t \qquad y_1 = 2 \cos t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

e che la posizione di una seconda particella sia data da

$$x_2 = -3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \sin t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(a) Disegnare la traiettoria descritta da ognuna delle particelle. Quante intersezioni hanno?

(b) Si può dire che alcuni di questi punti sono *punti di collisione*, capita cioè che le particelle assumano la stessa posizione nello stesso istante? Nel caso, calcolare i punti di collisione.

(c) Descrivere cosa accadrebbe se la seconda particella seguisse la traiettoria

$$x_2 = 3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \sin t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

37. Studiare la famiglia di curve definite dall'equazione parametrica $x = t^2$, $y = t^3 - ct$. Come cambia la forma delle curve al crescere di c? Verificare l'ipotesi disegnando i grafici di alcune curve appartenenti alla famiglia.

38. Una famiglia di curve è definita dall'equazione parametrica $x = 2ct - 4t^3$, $y = -ct^2 + 3t^4$. Disegnare alcune curve della famiglia. Cosa hanno in comune? Come cambiano al variare di c?

39. Le curve di equazione $x = a \sin nt$, $y = b \cos t$ sono dette **figure di Lissajous**. Studiare come cambiano le curve al variare di a, b e n (n è un intero positivo.)

40. Studiare la famiglia di equazioni definite dall'equazione parametrica

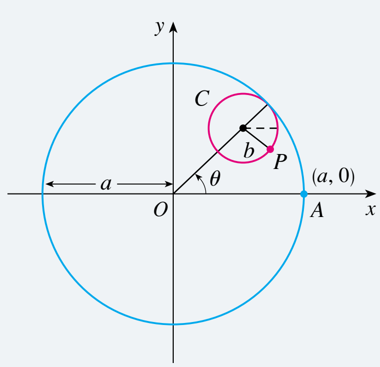
$$x = \sin t\,(c - \sin t) \qquad y = \cos t\,(c - \sin t)$$

Come influenza il valore assunto da c la forma della curva? In particolare, quale valore di c determina il passaggio da una forma a un'altra?

Progetto di laboratorio

Famiglie di ipocicloidi

Studiamo due famiglie di curve, dette ipocicloidi ed epicicloidi, che vengono generate dal moto di un punto su un cerchio che ruota internamente o esternamente a un altro cerchio.



1. Un'**ipocicloide** è la curva disegnata da un punto P su un cerchio C di raggio b mentre C ruota internamente a un cerchio di centro O e di raggio a. (Fisicamente questo è possibile solo se $a > b$, ma le curve possono essere disegnate anche se $a < b$.) Mostrare che se la posizione iniziale di P è $(a, 0)$ e il parametro θ è scelto come in figura, allora le equazioni parametriche dell'ipocicloide sono

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos\left(\frac{a - b}{b}\,\theta\right) \qquad y = (a - b) \sin \theta - b \sin\left(\frac{a - b}{b}\,\theta\right)$$

2. Usare un calcolatore per disegnare il grafico di un'ipocicloide con a intero positivo e $b = 1$. Come viene influenzato il grafico dal valore assunto da a? Mostrare che se $a = 4$, allora le equazioni parametriche dell'ipocicloide si riducono a

$$x = 4 \cos^3\theta \qquad y = 4 \sin^3\theta$$

Questa curva è detta **ipocicloide a quattro cuspidi**, o **astroide**.

3. Si ponga $b = 1$ e $a = n/d$, dove n e d sono interi primi tra loro. Porre ora $n = 1$ e cercare l'interazione del denominatore d con la forma della curva. Quindi far variare n tenendo d costante. Cosa accade se $n = d + 1$?

4. Cosa accade se $b = 1$ e a è irrazionale? Provare per esempio con un irrazionale come $\sqrt{2}$ oppure con $e - 2$. Considerare valori di θ sempre più grandi e fare ipotesi su come dovrebbe essere il grafico dell'ipocicloide se θ assumesse ogni valore reale.

5. Se il cerchio C rotola *esternamente* al cerchio fissato, la curva disegnata da P è un'**epicicloide**. Trovare le sue equazioni parametriche.

6. Studiare le possibili forme di un'epicicloide, usando metodi simili a quelli suggeriti nei Problemi 2-4.

1 Riepilogo

CONTROLLO CONCETTUALE

1. (a) Cos'è una funzione?
(b) Cos'è il grafico di una funzione?
(c) Come si può capire se una curva rappresenta il grafico di una funzione?

2. Discutere i quattro modi possibili per rappresentare una funzione, fornendo alcuni esempi.

3. (a) Cos'è una funzione pari? Come si può capire se una funzione è pari semplicemente guardando il suo grafico?
(b) Cos'è una funzione dispari? Come si può capire se una funzione è dispari guardando il suo grafico?

4. Cos'è una funzione crescente?

5. Cos'è un modello matematico?

6. Dare un esempio per ciascun tipo di funzione.
(a) funzione lineare (b) funzione potenza
(c) funzione esponenziale (d) funzione quadratica
(e) polinomio di grado 5 (f) funzione razionale

7. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni, nello stesso sistema di riferimento.
(a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$
(c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$

8. Disegnare a mano un gafico approssimativo per le seguenti funzioni
(a) $y = \sin x$ (b) $y = \tan x$
(c) $y = e^x$ (d) $y = \ln x$
(e) $y = 1/x$ (f) $y = |x|$
(g) $y = \sqrt{x}$

9. Si supponga che f abbia dominio A e g abbia dominio B.
(a) Qual è il dominio di $f + g$?
(b) Qual è il dominio di fg?
(c) Qual è il dominio di f/g?

10. Come è definita la composizione $f \circ g$? Qual è il suo dominio?

11. Sia assegnato il grafico di f. Scrivere l'equazione che esprime ciascuno dei grafici ottenuti da quello di f come segue.
(a) Traslazione di 2 unità verso l'alto
(b) Traslazione di 2 unità verso il basso
(c) Traslazione di 2 unità verso destra
(d) Traslazione di 2 unità verso sinistra
(e) Riflessione rispetto all'asse x
(f) Riflessione rispetto all'asse y
(g) Dilatazione verticale di un fattore 2
(h) Contrazione verticale di un fattore 2
(i) Dilatazione orizzontale di un fattore 2
(j) Contrazione orizzontale di un fattore 2

12. (a) Cos'è una funzione uno a uno? Come si può capire se una funzione è uno a uno guardando il suo grafico?
(b) Se f è uno a uno, come è definita la sua inversa f^{-1}? Come si ottiene il grafico di f^{-1} dal grafico di f?

13. (a) Cos'è una curva parametrica?
(b) Come si disegna una curva parametrica?

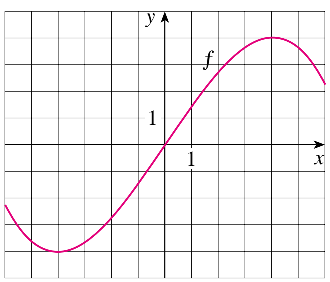
VERO / FALSO

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, giustificare la risposta; se false, fornire un controesempio.

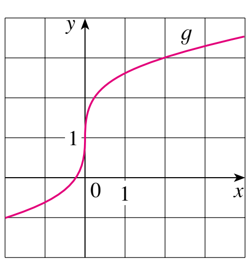
1. Se f è una funzione, allora $f(s + t) = f(s) + f(t)$.
2. Se $f(s) = f(t)$, allora $s = t$.
3. Se f è una funzione, allora $f(3x) = 3f(x)$.
4. Se $x_1 < x_2$ e f è una funzione decrescente, allora
$$f(x_1) > f(x_2)$$
5. Una retta verticale interseca il grafico di una funzione al più una volta.
6. Se f e g sono funzioni, allora $f \circ g = g \circ f$.
7. Se f è uno a uno, allora $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
8. Si può sempre dividere per e^x.
9. Se $0 < a < b$, allora $\ln a < \ln b$.
10. Se $x > 0$, allora $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.
11. Se $x > 0$ e $a > 1$, allora $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.

ESERCIZI

1. Sia f la funzione rappresentata nel grafico.
(a) Stimare il valore di $f(2)$.
(b) Stimare il valore di x tale che $f(x) = 3$.
(c) Stabilire il dominio di f.
(d) Stabilire l'immagine di f.
(e) Su quale intervallo f è crescente?
(f) f è uno a uno? Motivare la risposta.
(g) f è pari, dispari o nessuna delle due? Motivare la risposta.



2. È dato il grafico di g.
(a) Stimare il valore di $g(2)$.
(b) Perché g è uno a uno?
(c) Stimare il valore di $g^{-1}(2)$.
(d) Stabilire il dominio di g^{-1}.
(e) Disegnare il grafico di g^{-1}.



3. La distanza percorsa da un'autovettura è descritta dalla tabella seguente.

t (secondi)	0	1	2	3	4	5
d (metri)	0	10	32	70	119	178

(a) Usare i dati per disegnare un grafico di d in funzione di t.
(b) Usare il grafico per stimare la distanza percorsa dopo 4.5 secondi.

4. Disegnare un grafico approssimativo che rappresenti la resa di un raccolto, in funzione della quantità di fertilizzante usata.

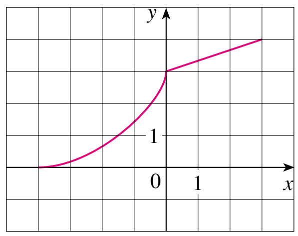
5–8 ■ Trovare dominio e immagine delle funzioni.

5. $f(x) = \sqrt{4 - 3x^2}$
6. $g(x) = 1/(x + 1)$
7. $y = 1 + \sin x$
8. $y = \ln \ln x$

9. Si supponga assegnato il grafico di f. Descrivere come si può ottenere da esso il grafico delle funzioni seguenti.
(a) $y = f(x) + 8$ (b) $y = f(x + 8)$
(c) $y = 1 + 2f(x)$ (d) $y = f(x - 2) - 2$
(e) $y = -f(x)$ (f) $y = f^{-1}(x)$

10. Dato il grafico di f, disegnare quello delle funzioni seguenti.
(a) $y = f(x - 8)$ (b) $y = -f(x)$
(c) $y = 2 - f(x)$ (d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$

(e) $y = f^{-1}(x)$ (f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11–16 ■ Usare il metodo delle trasformazioni per disegnare il grafico delle funzioni seguenti.

11. $y = -\sin 2x$

12. $y = 3\ln(x - 2)$

13. $y = (1 + e^x)/2$

14. $y = 2 - \sqrt{x}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

16. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$

17. Determinare se f è pari, dispari o né pari né dispari.
(a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$
(b) $f(x) = x^3 - x^7$
(c) $f(x) = e^{-x^2}$
(d) $f(x) = 1 + \sin x$

18. Trovare l'espressione algebrica che descrive la funzione il cui grafico consiste nel segmento di estremi $(-2, 2)$ e $(-1, 0)$ insieme alla metà superiore della circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

19. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 - 9$, trovare le funzioni $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ e i loro dominii.

20. Esprimere la funzione $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ come composizione di tre funzioni.

21. L'aspettativa di vita è notevolmente aumentata in occidente nell'ultimo secolo. La tabella seguente riporta l'aspettativa di vita (in anni) alla nascita per un bambino maschio nato negli Stati Uniti.

Anno di nascita	Aspettativa di vita
1900	48.3
1910	51.1
1920	55.2
1930	57.4
1940	62.5
1950	65.6
1960	66.6
1970	67.1
1980	70.0
1990	71.8
2000	73.0

Disegnare i dati in un grafico discreto e scegliere un buon modello di approssimazione. Usare il modello per prevedere l'aspettativa di vita di un bambino nato nel 2010.

22. Una piccola industria di elettrodomestici spende 9000 dollari per produrre 1000 tostapane in una settimana; incrementando la produzione a 1500 tostapane per settimana, il costo passa a 12000 dollari.
(a) Esprimere il costo di produzione sostenuto dall'azienda, assumendo sia lineare. Disegnarne il grafico.
(b) Cosa rappresenta la pendenza della retta disegnata?
(c) Cosa rappresenta l'intersezione della retta con l'asse y?

23. Se $f(x) = 2x + \ln x$, trovare $f^{-1}(2)$.

24. Trovare la funzione inversa di $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$.

25. Trovare l'esatto valore di ciascuna espressione.
(a) $e^{2\ln 3}$ (b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

26. Risolvere ciascuna equazione rispetto a x.
(a) $e^x = 5$ (b) $\ln x = 2$ (c) $e^{e^x} = 2$

27. Il tempo di dimezzamento del palladio100, ^{100}Pd, è di quattro giorni. (Perciò, metà di una qualunque quantità di palladio si disintegra in quattro giorni.) La massa campione è di un grammo.
(a) Trovare la massa rimanente dopo 16 giorni.
(b) Trovare la massa $m(t)$ che rimane dopo t giorni.
(c) Trovare l'inversa di questa funzione e spiegarne il significato.
(d) Quando la massa si sarà ridotta a 0.01 grammi?

28. La popolazione di una certa specie animale che occupa un ambiente limitato è inizialmente di 100 unità e può raggiungere il numero di 1000. È inoltre descritta da

$$P(t) = \frac{100\,000}{100 + 900e^{-t}}$$

dove t è misurato in anni.
(a) Disegnare questa funzione e stimare quanto tempo occorre perché la popolazione raggiunga le 900 unità.
(b) Trovare la sua funzione inversa e descriverne il significato.
(c) Usare la funzione inversa per trovare il tempo necessario perché vengano raggiunte le 900 unità. Confrontare il risultato con quello della domanda (a).

29. Disegnare la famiglia di funzioni $f(x) = \ln(x^2 - c)$ per differenti valori del parametro c. Come cambia il grafico al variare di c?

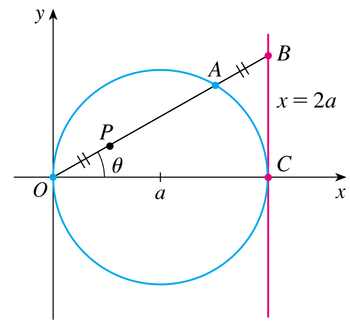
30. Disegnare le tre funzioni $y = x^a$, $y = a^x$ e $y = \log_a x$ nella stessa schermata, e per diversi valori di $a > 1$. Per grandi valori di x, quale tra queste funzioni assume valori più grandi e quale valori più piccoli?

31. (a) Disegnare la curva rappresentata dall'equazione parametrica $x = e^t$, $y = \sqrt{t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, e indicare con una freccia la direzione di crescita del parametro.
(b) Eliminare il parametro per trovare l'equazione cartesiana della curva.

32. (a) Trovare l'equazione parametrica di una particella che si muove in senso antiorario sulla semicirconferenza $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, dall'alto verso il basso.
(b) Usare la risposta al quesito (a) per disegnare la curva.

33. Usare le equazioni parametriche per disegnare la funzione $f(x) = 2x + \ln x$ e la sua inversa sullo stesso schermo.

34. (a) Trovare l'equazione parametrica per l'insieme dei punti P determinati in modo che $|OP| = |AB|$ come si vede in figura. (Questa curva viene chiamata la **cissoide di Diocle** dal nome dello studioso greco che la introdusse come metodo grafico per costruire gli spigoli di un cubo il cui volume sia doppio di quello di un cubo assegnato.)



(b) Usare la descrizione geometrica della curva per disegnarla approssimativamente a mano. Controllare il risultato confrontandolo con il grafico ottenuto dalle equazioni parametriche.

Princìpi di problem solving

Non ci sono metodi sicuri e veloci che possano sempre e comunque assicurare il successo nella risoluzione di problemi. Però possiamo descrivere delle linee guida ed esporre qualche principio che potrà essere utile per affrontare la risoluzione di alcuni problemi. Si tratta di passaggi e osservazioni dovuti essenzialmente al senso pratico, adattati dal testo di George Polya *How to solve it*.

1 Capire il problema

Il primo passo è quello di leggere il problema essendo certi di averlo compreso con chiarezza. Ponetevi le domande:

Cosa si cerca?

Cosa è noto?

Quali sono i vincoli?

In molti casi è utile anche

disegnare un diagramma

dove identificare le grandezze note o richieste.

Di solito, è anche necessario

introdurre una opportuna notazione

Nella scelta dei simboli per identificare le grandezze ignote sono spesso usate le lettere a, b, c, m, n, x e y, ma può essere certamente utile anche usare dei simboli che suggeriscano il significato della variabile, come V per indicare il volume, o t per il tempo.

2 Pensare una strategia

Per calcolare l'incognita, vi potrà aiutare l'aver trovato una connessione con i dati. Può essere consigliabile porsi la seguente domanda: "Come posso collegare i dati con l'incognita?" Se non trovate immediatamente un legame, le prossime idee potranno fornirvi una buona strategia.

Cercare di riconoscere qualcosa di familiare Mettete in relazione la situazione allo studio con le vostre conoscenze precedenti. Richiamate alla memoria il problema più simile che avete incontrato.

Cercare di riconoscere le forme ricorrenti Alcuni problemi si risolvono riconoscendo che una certa forma è ricorrente. Questa forma potrebbe essere geometrica, numerica o algebrica. Se individuate una regolarità o una ripetizione in un problema, potreste essere anche in grado di indovinare quale forma si ripete e quindi di provarla.

Usare l'analogia Pensate a un analogo del vostro problema, cioè a un problema simile, un problema connesso, uno magari più semplice rispetto al problema originario. Saper risolvere il problema simile più semplice può fornire indizi su come risolvere il problema originale, più difficile. Per esempio, se un problema ha numeri molto grandi, potreste provare a risolvere un problema simile, ma con numeri più piccoli. Oppure, se un problema richiede l'uso della geometria tridimensionale, potreste provare a ridurlo a un problema bidimensionale. Oppure, se un problema si occupa di un caso generale, potreste provare prima a risolvere un caso particolare.

Introdurre qualcosa di nuovo A volte può essere necessario introdurre qualcosa di nuovo, un ausilio, per facilitare la connessione fra i dati e le incognite. Per esempio, in un problema in cui risulta utile un diagramma l'ausilio potrebbe essere rappresentato da una nuova retta, mentre in un problema più algebrico potrebbe essere rappresentato da una nuova variabile correlata all'originale incognita.

Considerare i casi Talora si può suddividere un problema in più casi, dando diverse argomentazioni per ciascuno di essi. È la situazione, per esempio, che si incontra con i problemi in cui entrano in gioco i valori assoluti.

Lavorare a ritroso Qualche volta può risultare utile ipotizzare che il problema sia risolto e lavorare a ritroso, passo per passo, fino a giungere ai dati forniti; dopodiché si può essere in grado di invertire il percorso, costruendo così una soluzione del problema di partenza. Questa procedura è usata, in particolare, nella risoluzione delle equazioni. Per esempio, per risolvere l'equazione $3x - 5 = 7$, si ipotizza che x sia un numero che soddisfa l'equazione data e si lavora a ritroso. Si aggiunge 5 a ciascun membro dell'equazione, quindi si dividono ambo i membri per 3, ottenendo $x = 4$. Dato che ogni passo del ragionamento può essere invertito, si è così risolto il problema.

Stabilire degli obiettivi intermedi In un problema complesso, è spesso utile stabilire degli obiettivi intermedi (in cui la situazione desiderata è solo in parte verificata). Se si riescono a centrare questi obiettivi parziali, è possibile che grazie a essi si riesca a raggiungere quello finale.

Seguire i ragionamenti indiretti A volte è opportuno stabilire un approccio indiretto al problema. Nell'usare una dimostrazione per assurdo per provare che P implica Q, si assume che P sia vera e Q falsa, quindi si cerca di vedere perché ciò non può verificarsi. Si tratta di arrivare a una contraddizione con ciò che è sicuramente vero.

Usare l'induzione matematica Nella dimostrazione di enunciati che coinvolgono un intero positivo n, è sovente di aiuto il seguente principio.

Principio di induzione matematica Sia S_n un enunciato circa l'intero positivo n. Si supponga che

1. S_1 sia vero.
2. S_{k+1} sia vero se S_k è vero.

Allora S_n è vero per tutti gli interi positivi.

Ciò è ragionevole, poiché se S_1 è vero, segue dalla condizione 2 (con $k = 1$) che S_2 è vero. Quindi, usando la condizione 2 con $k = 2$, si vede che S_3 è vero. Iterando all'infinito il ragionamento, si ha che S_n è vero per ogni n.

3 Seguire la strategia

Al punto 2 si è stabilita una strategia. Nel seguire quest'ultima bisogna controllare ciascuno stadio e scrivere i dettagli che ne provano la correttezza.

4 Ricontrollare

Avendo completato la risoluzione, è saggio tornare sui propri passi e riguardare quanto svolto, per vedere se sono stati fatti errori e anche per verificare se non ci sarebbe stato un modo più semplice per arrivare alla soluzione. Un'altra ragione per ricontrollare è quella di cercare di familiarizzare con il metodo svolto, in modo da poterlo in seguito applicare ad altri problemi. Con le parole di Cartesio: “Ogni problema che risolvo indica una strada che servirà poi per risolverne altri”.

Questi princìpi di problem solving sono applicati negli esempi che seguono. Prima di controllare le soluzioni, provate a risolverli da soli, riferendovi ai princìpi appena enunciati se siete in difficoltà. Potrà essere utile, di tanto in tanto, riferirvi a questa sezione del testo anche in futuro, per risolvere gli esercizi assegnati in altri capitoli.

ESEMPIO 1 Esprimere l'ipotenusa h in funzione del perimetro P di un triangolo rettangolo di area 25 m^2.

■ Capire il problema

SOLUZIONE Per prima cosa, identifichiamo le incognite e i dati:

Incognita: ipotenusa

Dati: perimetro P, area 25 m^2

■ Disegnare un diagramma

Disegniamo un diagramma come in Figura 1.

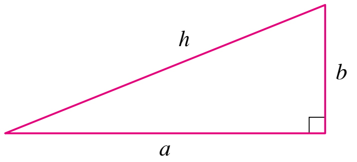


FIGURA 1

■ Mettere in relazione le incognite con i dati

■ Introdurre qualcosa di nuovo

Per mettere in relazione le incognite con i dati, introduciamo due variabili ausiliarie a e b, che sono le lunghezze dei due cateti. In questo modo possiamo esprimere il fatto che il triangolo è rettangolo per mezzo del teorema di Pitagora:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Le altre relazioni che legano le quantità in gioco si trovano scrivendo l'espressione dell'area e del perimetro:

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h$$

Poiché P è assegnato, si noti che abbiamo tre equazioni nelle tre incognite a, b e h:

$$\boxed{1} \qquad h^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{2} \qquad 25 = \tfrac{1}{2}ab$$

$$\boxed{3} \qquad P = a + b + h$$

■ Riferirsi a qualcosa di familiare

Anche se abbiamo il numero giusto di equazioni, queste non sono facili da risolvere direttamente. Ma se usiamo la strategia del problem solving di ricondurre il tutto a qualcosa di familiare, forse possiamo riconoscere la somiglianza tra i secondi membri delle Equazioni 1, 2 e 3 e gli ingredienti della formula

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

In questo modo possiamo esprimere $(a + b)^2$ in due modi. Dalle Equazioni 1 e 2 ricaviamo

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

Dall'equazione 3:

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

Perciò $$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$

$$2Ph = P^2 - 100$$

$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

che è l'espressione richiesta di h in funzione di P. ■

Come illustra il prossimo esempio, è necessario usare il principio del problem solving di *considerare i casi* quando si ha a che fare con equazioni dove compare il modulo.

ESEMPIO 2 Risolvere la disequazione $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

SOLUZIONE Si ricordi la definizione di valore assoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Ne segue che

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & x - 3 \geqslant 0 \\ -(x - 3) & x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 3 & x \geqslant 3 \\ -x + 3 & x < 3 \end{cases}$$

Analogalmente

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & x + 2 \geqslant 0 \\ -(x + 2) & x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 2 & x \geqslant -2 \\ -x - 2 & x < -2 \end{cases}$$

■ Considerare i casi

Queste espressioni ci invitano a considerare tre casi:

$$x < -2 \qquad -2 \leqslant x < 3 \qquad x \geqslant 3$$

CASO I • Se $x < -2$, abbiamo

$$\begin{aligned} |x - 3| + |x + 2| &< 11 \\ -x + 3 - x - 2 &< 11 \\ -2x &< 10 \\ x &> -5 \end{aligned}$$

CASO II • Se $-2 \leqslant x < 3$, la disuguaglianza assegnata diventa

$$\begin{aligned} -x + 3 + x + 2 &< 11 \\ 5 &< 11 \qquad \text{(sempre vera)} \end{aligned}$$

CASO III • Se $x \geqslant 3$, la disuguaglianza diventa

$$\begin{aligned} x - 3 + x + 2 &< 11 \\ 2x &< 12 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

Combinando i casi I, II e III, si trova che la disuguaglianza è verificata sull'intervallo $(-5, 6)$.

Negli esempi seguenti proveremo prima a dedurre la risposta riconoscendo una forma o considerando casi particolari, quindi la proveremo con il Principio d'induzione.

Nell'uso del Principio di induzione matematica si seguono tre passi:

PASSO 1 Si prova che S_n è vera per $n = 1$.

PASSO 2 Si prova che se S_n è vera per $n = k$ è vera anche per $n = k + 1$.

PASSO 3 Si conclude che per il Principio d'induzione S_n è vera per ogni n.

ESEMPIO 3 Se $f_0(x) = x/(x + 1)$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$, trovare una formula per esprimere $f_n(x)$.

■ Analogia: provare un problema simile ma più semplice

SOLUZIONE Incominciamo col trovare una formula per esprimere $f_n(x)$ nei casi particolari $n = 1$, 2 e 3.

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right)$$
$$= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$
$$= \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

■ Cercare una forma ricorrente

$$f_3(x) = (f_0 \circ f_2)(x) = f_0(f_2(x)) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$
$$= \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

Notiamo una forma specifica: nei tre casi che abbiamo scritto, il coefficiente di x a denominatore di $f_n(x)$ è $n + 1$. Perciò supponiamo che anche in generale sarà

4 $$f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x+1}$$

Per provarlo, usiamo il Principio d'induzione. Abbiamo già verificato che la (4) è vera per $n = 1$. Assumiamo che sia vera anche per $n = k$, cioè:

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x+1}$$

Allora $$f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0(f_k(x)) = f_0\left(\frac{x}{(k+1)x+1}\right)$$
$$= \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}$$

Questa espressione prova che la (4) è vera anche per $n = k + 1$. Perciò, per induzione, è vera per ogni intero positivo n. ■

• Problemi

1. Uno dei cateti di un triangolo rettangolo misura 4 cm. Esprimere la misura dell'altezza perpendicolare all'ipotenusa come funzione della lunghezza dell'ipotenusa stessa.

2. L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura 12 cm. Esprimere la lunghezza dell'ipotenusa in funzione del perimetro.

3. Risolvere l'equazione $|2x - 1| - |x + 5| = 3$.

4. Risolvere la disequazione $|x - 1| - |x - 3| \geqslant 5$.

5. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$.

6. Disegnare il grafico della funzione $g(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$.

7. Disegnare il grafico dell'equazione $|x| + |y| = 1 + |xy|$.

8. Disegnare il grafico dell'equazione $x^2y - y^3 - 5x^2 + 5y^2 = 0$ senza ricondursi a una tabella di valori.

9. Disegnare la regione di piano descritta dai punti (x, y) tali che $|x| + |y| \leqslant 1$.

10. Disegnare la regione di piano descritta dai punti (x, y) tali che

$$|x - y| + |x| - |y| \leqslant 2$$

11. Valutare $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\cdots(\log_{31} 32)$.

12. (a) Mostrare che la funzione $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ è una funzione pari.
(b) Trovarne l'inversa.

13. Risolvere la disequazione $\ln(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$.

14. Provare indirettamente che $\log_2 5$ è un numero irrazionale.

15. Durante un viaggio un autista guida alla velocità di 60 km/h per metà del viaggio, quindi procede alla velocità di 120 km/h per l'altra metà. Qual è la velocità media?

16. È vero che $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$?

17. Provare che se n è un intero positivo, allora $7^n - 1$ è divisibile per 6.

18. Provare che $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

19. Se $f_0(x) = x^2$ e $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ per $n = 0, 1, 2, \ldots,$ trovare una formula per $f_n(x)$.

20. (a) Se $f_0(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ per $n = 0, 1, 2, \ldots,$ trovare un'espressione per $f_n(x)$ e utilizzare il Principio di induzione per dimostrarla.
(b) Disegnare nella stessa schermata f_0, f_1, f_2, f_3 e descrivere l'effetto della composizione ripetuta.