1 Funzioni e modelli

Gli oggetti fondamentali che occorre conoscere per affrontare lo studio del calcolo sono le funzioni. In questo capitolo verrà presentata una panoramica sui principali risultati relativi alle funzioni di variabile reale, ai loro grafici e alle relazioni che tra loro intercorrono quando vengono composte. Una funzione può essere definita in quattro modi diversi, ma equivalenti: con un grafico, un'equazione, una tabella di valori o assegnandone il grafico. Oltre a riassumere quali sono le funzioni più comunemente usate nel calcolo, introdurremo anche una pratica per dedurre un modello che descriva con linguaggio matematico un fenomeno fisico. Per fare questo si ricorre spesso all'uso di software appropriati che permettono di disegnare in modo estremamente accurato certi tipi di curve.

1.1 Quattro modi per rappresentare una funzione

Si parla di funzioni ogni volta che una certa grandezza è soggetta a dipendere da un'altra. Consideriamo come esempio i casi seguenti:

A. L'area A di un cerchio dipende dal raggio r del cerchio stesso. La legge che lega r ad A è data dall'equazione $A = \pi r^2$. A ogni numero positivo r è associato quindi un valore di A, e diciamo che A è una *funzione* di r.

B. La popolazione mondiale P dipende dal tempo t. La tabella riporta una stima del valore della popolazione mondiale $P(t)$ nell'anno t. Per esempio

$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

e a ogni altro valore di t corrisponde un valore di P, perciò diciamo che P è funzione di t.

Anno	Popolazione (milioni)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6070

C. Il costo C di spedizione di una raccomandata dipende dal peso p della lettera. Anche senza disporre di una formula esplicita, negli uffici postali è possibile reperire le regole che assegnano C in funzione di p.

D. L'accelerazione verticale a del terreno misurata da un sismografo durante un terremoto è funzione del tempo trascorso t. La Figura 1 mostra il grafico generato dall'attività sismica durante il terremoto di Los Angeles del 1994. Per ogni dato valore del tempo t, il grafico fornisce il corrispondente valore di a.

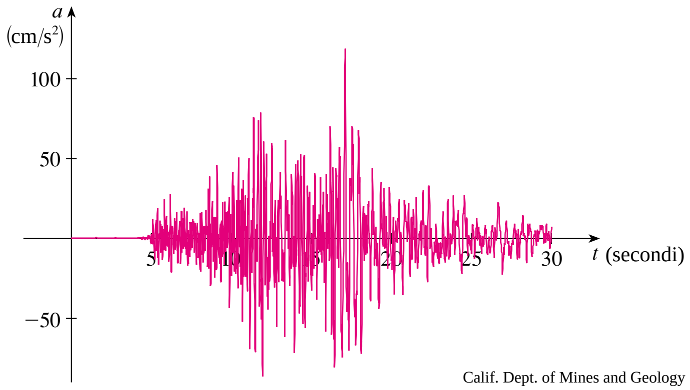


FIGURA 1
Accelerazione verticale del terreno durante il terremoto di Los Angeles

Ciascuno di questi esempi descrive un modo attraverso il quale un certo numero (r, t, p, t) ne determina un altro (A, P, C, a). In tutti questi casi diciamo che il secondo numero è una funzione del primo.

> Una **funzione** f è una legge che assegna a ogni elemento x di un insieme A uno e un solo elemento, detto $f(x)$, di un secondo insieme B.

Di solito si considerano funzioni per le quali gli insiemi A e B sono insiemi di numeri reali. L'insieme A è detto **dominio** della funzione. Il numero $f(x)$ è il valore di f in x e si legge "f di x". L'**immagine** di f è l'insieme di tutti i possibili valori assunti da $f(x)$ per x che varia nel dominio. Il simbolo che rappresenta un valore arbitrario x nel *dominio* di una funzione f viene detto **variabile indipendente**. Il simbolo che rappresenta un numero nell'*immagine* di f è detto **variabile dipendente**. Nell'esempio A, r è la variabile indipendente e A la variabile dipendente.

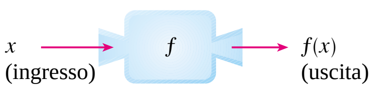


FIGURA 2
La funzione f come dispositivo ingresso-uscita

È utile pensare a una funzione come a una *macchina* o a un **dispositivo** (Figura 2). Se x è nel dominio della funzione f, allora, quando x entra nel dispositivo, viene accettato come ingresso e viene prodotta un'uscita $f(x)$ in base alla legge data dalla funzione. In questo senso, si può pensare al dominio come a tutti i possibili valori d'ingresso e al codominio come a tutte le possibile uscite.

Le funzioni programmate in una calcolatrice sono buoni esempi di funzioni come macchine. Per esempio, il tasto della radice quadrata sulla calcolatrice è una funzione. Per prima cosa si digita x in modo che appaia sul display. Quindi si preme il tasto $\sqrt{\ }$ (o $\sqrt{x}$). Se $x < 0$ non è nel dominio della funzione, cioè non è accettabile come valore d'ingresso, e la calcolatrice produrrà un messaggio d'errore. Se $x \geq 0$, allora appare sullo schermo un'*approssimazione* di $\sqrt{x}$. Perciò, il tasto sulla calcolatrice non corrisponde perfettamente alla funzione matematica $f(x)$ definita da $f(x) = \sqrt{x}$.

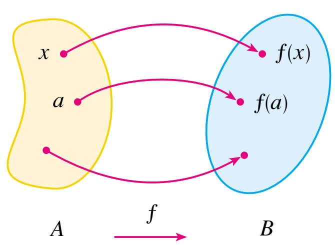


FIGURA 3
Diagramma a frecce per la funzione f

Un altro modo di rappresentare una funzione è attraverso un **diagramma a frecce**, come in Figura 3. Ogni freccia collega un elemento di A a un elemento di B. La freccia indica che $f(x)$ è associata a x, $f(a)$ è associata ad a, e così via.

Il modo più comune per visualizzare una funzione è tramite il suo grafico. Se f è una funzione di dominio A, allora il suo **grafico** è l'insieme di coppie ordinate

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

(Si osservi che queste sono coppie ingresso-uscita.) In altre parole, il grafico consiste in tutti i punti (x, y) del piano tali che $y = f(x)$ e x è nel dominio di f.

Il grafico di una funzione fornisce una rappresentazione molto utile dell'andamento della funzione stessa. Poiché la coordinata y del punto (x, y) di un grafico è $y = f(x)$, deduciamo che il valore di $f(x)$ corrisponde all'altezza del grafico stesso in corrispondenza del punto x (Figura 4). Il grafico di f ci permette inoltre di visualizzare il dominio e l'immagine di f sull'asse x e l'asse y rispettivamente, come in Figura 5.

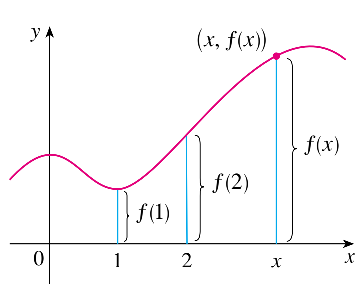


FIGURA 4

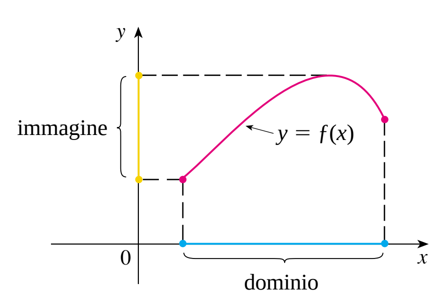


FIGURA 5

ESEMPIO 1 La Figura 6 rappresenta il grafico di una funzione.
(a) Trovare i valori di $f(1)$ e di $f(5)$.
(b) Quali sono il dominio e l'immagine di f ?

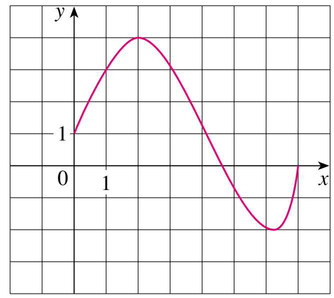


FIGURA 6

SOLUZIONE

(a) Dalla figura si ricava che il punto (1, 3) appartiene al grafico di f, così che il valore di f in 1 è 3. (In altre parole, il punto del grafico che giace verticalmente su $x = 1$ dista tre unità dall'asse x.)

Quando invece $x = 5$, il grafico giace circa 0.7 unità sotto l'asse x, perciò si stima $f(x) \approx -0.7$.

(b) Si vede che $f(x)$ è definita quando $0 \leq x \leq 7$, cosicché il dominio di f è l'intervallo chiuso [0, 7]. Si osservi che f assume tutti i valori da –2 a 4, perciò l'immagine di f è

▲ La notazione per gli intervalli è presentata in Appendice A.

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$

ESEMPIO 2 Disegnare il grafico e trovare il dominio delle seguenti funzioni:
(a) (a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = x^2$

SOLUZIONE

(a) L'equazione da disegnare è $y = 2x - 1$, che rappresenta una retta di coefficiente angolare 2 e intercetta –1 sull'asse y. (Si consulti l'Appendice B per l'equazione della retta in forma esplicita: $y = mx + b$.) Possiamo dunque disegnare il grafico di f in Figura 7. L'espressione $2x - 1$ è definita per ogni valore reale di x, così che il dominio di f è l'insieme dei numeri reali, che denoteremo con $\mathbb{R}$. Dal grafico si deduce che anche l'immagine è $\mathbb{R}$.

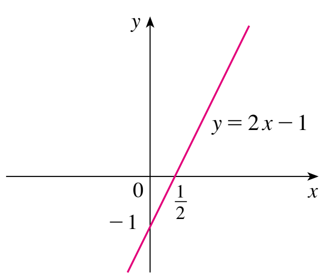


FIGURA 7

(b) Poiché $g(2) = 2^2 = 4$ e $g(-1) = (-1)^2 = 1$, possiamo includere nel grafico della funzione che cerchiamo i punti (2, 4) e (–1, 1); procedendo analogamente per alcuni altri punti, si arriva al grafico di Figura 8. L'equazione del grafico è $y = x^2$, e rappresenta una parabola (si veda l'Appendice B). Il dominio di g è $\mathbb{R}$, e l'immagine consiste in tutti i valori di $g(x)$, ossia i numeri della forma x^2. Poiché $x^2 \geq 0$ per tutti i numeri x e ogni numero positivo y è un quadrato, l'immagine di g è $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, +\infty)$, come si osserva anche dalla Figura 8.

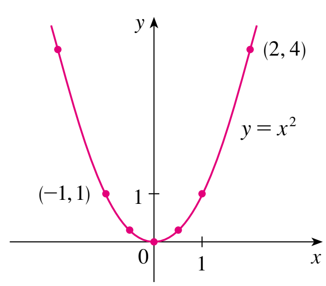


FIGURA 8

Rappresentazione delle funzioni

Vi sono quattro modi per rappresentare una funzione:

- verbalmente (con una descrizione a parole)
- numericamente (con una tabella di valori)
- visivamente (con un grafico)
- algebricamente (con una formula esplicita)

Se una stessa funzione può essere rappresenta in quattro modi diversi, è un utile esercizio cercare di passare da una rappresentazione a un'altra. (Nell'Esempio 2 siamo passati da una formulazione algebrica a una rappresentazione con un grafico.) Tuttavia alcune funzioni sono descritte in modo più naturale da un metodo piuttosto che da un altro. Tenendo presente quanto osservato, esaminiamo nuovamente le quattro situazioni presentate all'inizio del paragrafo.

A. Il modo più immediato per rappresentare l'area di un cerchio in funzione del raggio probabilmente è la formulazione algebrica data dalla formula $A(r) = \pi r^2$, sebbene sia altresì possibile redigere una tabella di valori o disegnare il grafico della funzione (una semiparabola). Poiché il cerchio deve avere raggio positivo, il dominio è $\{r \mid r > 0\} = (0, +\infty)$, e l'immagine è anch'essa $(0, +\infty)$.

B. Ci viene data una descrizione della funzione a parole: $P(t)$ è la popolazione del mondo al tempo t. La tabella a pagina 11 fornisce una rappresentazione opportuna della funzione. Se disegnassimo questi valori, otterremmo i punti riportati nel grafico di Figura 9. Anche questa è una buona rappresentazione; il grafico permette di visualizzare tutti i dati insieme. Naturalmente, è impossibile trovare una formula che rappresenti esattamente la popolazione $P(t)$ a ogni istante t, ma è possibile trovare l'espressione di una funzione che *approssimi* $P(t)$. Infatti, usando i metodi presentati nel Paragrafo 1.5, si ottiene:

$$P(t) \approx f(t) = (0.008196783) \cdot (1.013723)^t$$

La Figura 10 mostra che c'è una coincidenza ragionevole tra dati e approssimazione. La funzione f viene detta *modello matematico* per la crescita della popolazione. In altre parole, è una funzione assegnata con una formula esplicita, che approssima il comportamento della nostra funzione. Vedremo, comunque, che le idee del calcolo possono essere applicate anche alle tabelle di valori, e una formula esplicita non è necessaria.

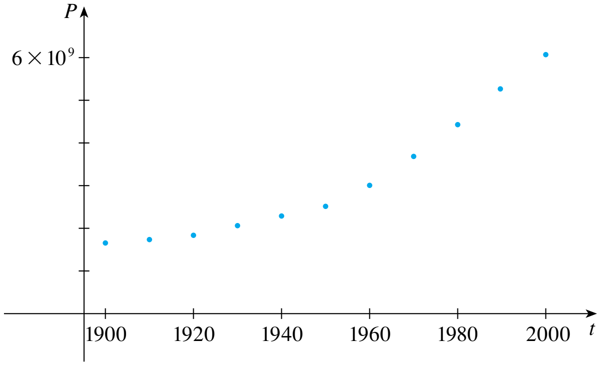


FIGURA 9

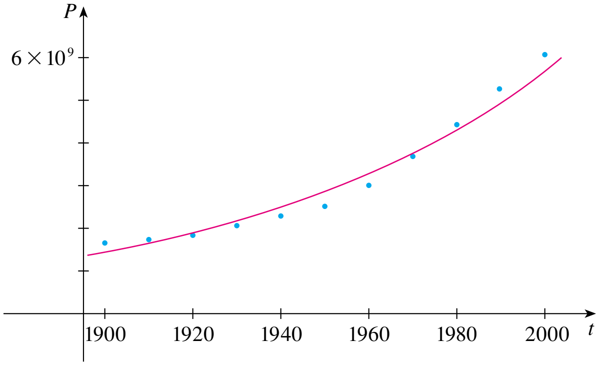


FIGURA 10

Funzioni come la P si presentano ogni volta che si cerca di applicare il calcolo al mondo reale. Si parte con una descrizione a parole della funzione, quindi in genere si riesce a costruire una tabella relativa al fenomeno, magari attraverso rilevamenti strumentali in un esperimento scientifico. Anche senza una conoscenza completa dei valori della funzione, vedremo che è ancora possibile eseguire operazioni di calcolo su simili funzioni.

w (once)	$C(w)$ (dollari)
$0 < w \leqslant 1$	0.34
$1 < w \leqslant 2$	0.56
$2 < w \leqslant 3$	0.78
$3 < w \leqslant 4$	1.00
$4 < w \leqslant 5$	1.22
⋮	⋮

C. La funzione è ancora descritta a parole: $C(p)$ è il costo di una raccomandata di peso p. Il costo di una raccomandata negli USA nel 2001 è il seguente: un costo di 34 centesimi di dollaro per ogni lettera di peso fino a un'oncia, quindi un incremento di 22 centesimi per ogni oncia di peso successiva, fino a 11 once. La tabella a lato è la rappresentazione più conveniente per questa funzione, sebbene sia pure possibile disegnarne un grafico (si veda l'Esempio 10).

D. Il grafico in Figura 1 è la rappresentazione più naturale dell'accelerazione verticale $a(t)$. È vero che se ne potrebbe dedurre una tabella di valori, e che si potrebbe ravvisare anche una formula approssimata, ma ogni informazione necessaria al geologo (forma e ampiezza della vibrazione) può facilmente essere letta dal grafico. (Le stesse osservazioni si possono fare anche nel campo degli elettrocardiogrammi miocardici o dei multigrafici relativi alle macchine della verità, per esempio.) Le Figure 11 e 12 mostrano i grafici delle accelerazioni nord-sud ed est-ovest durante il terremoto di Los Angeles; se usati insieme alla Figura 1, forniscono una grande quantità di informazioni.

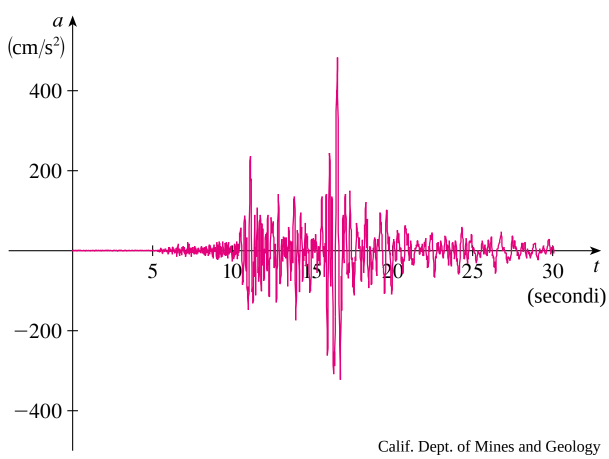


FIGURA 11 Registrazione sismografica dell'accelerazione nord-sud della terra durante il terremoto di Los Angeles

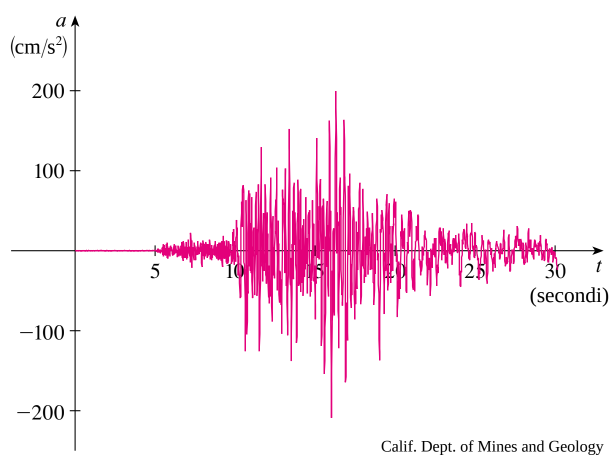


FIGURA 12 Registrazione sismografica dell'accelerazione est-ovest della terra durante il terremoto di Los Angeles

Nel prossimo esempio disegneremo il grafico di una funzione definita verbalmente.

ESEMPIO 3 Quando si apre un rubinetto dell'acqua calda, la temperatura T dell'acqua dipende dal lasso temporale per il quale è stata lasciata scorrere. Disegnare il grafico approssimativo di T in funzione del tempo t trascorso dopo che il rubinetto è stato aperto.

SOLUZIONE La temperatura iniziale dell'acqua calda corrente è vicina alla temperatura ambiente, poiché dell'acqua ha soggiornato nelle condutture, che non sono riscaldate. Quando dal rubinetto comincia a uscire l'acqua calda contenuta nello scaldabagno, T aumenta rapidamente. Quindi T rimane costante alla temperatura dell'acqua nello scaldabagno; quando questo si è svuotato, T decresce fino al valore della temperatura dell'acqua corrente. Con queste osservazioni siamo in grado di disegnare il grafico approssimativo di T in funzione di t, come in Figura 13.

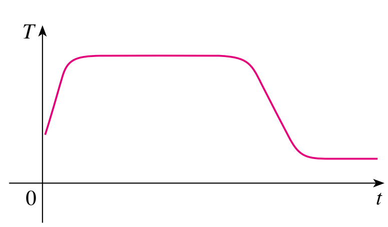


FIGURA 13

Un grafico più accurato per lo studio dell'Esempio 3 potrebbe ottenersi misurando la temperatura dell'acqua ogni dieci secondi. In generale, gli scienziati raccolgono dati sperimentali e li usano per disegnare grafici di funzioni, come illustra il prossimo esempio.

t	$C(t)$
0	0.0800
2	0.0570
4	0.0408
6	0.0295
8	0.0210

ESEMPIO 4 I dati mostrati a lato derivano da un esperimento di lattonizzazione dell'acido idrossivalerico a 25 °C. Essi danno la concentrazione $C(t)$ di quest'acido (in moli al litro) dopo t minuti. Usare questi dati per dedurre un'approssimazione del grafico della funzione di concentrazione. Quindi utilizzare tale grafico per stimare la concentrazione dopo 5 minuti.

SOLUZIONE Disegniamo i 5 punti corrispondenti ai dati assegnati in Figura 14. Il metodo spiegato nel Paragrafo 1.2 può essere usato per scegliere un modello e riportarlo in grafico. I dati in Figura 14 riflettono un chiaro andamento, cosicché è anche possibile intuire l'andamento di una curva regolare che approssimi quella cercata, congiungendoli a mano, così da ottenere la Figura 15.

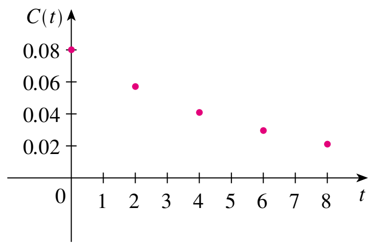


FIGURA 14

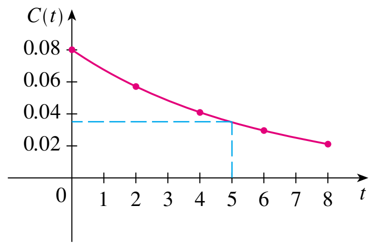


FIGURA 15

Quindi, se usiamo il grafico per stimare la concentrazione dopo 5 minuti, troviamo:

$$C(5) \approx 0.035 \text{ moli/litri}$$ ■

Nel prossimo esempio, da una descrizione a parole di una funzione che deriva da una modellizzazione fisica otterremo una formula algebrica esplicita. La capacità di fare ciò è indispensabile in quei problemi che richiedono di massimizzare o di minimizzare il valore di determinate quantità.

ESEMPIO 5 Una scatola rettangolare aperta in alto ha un volume di 10 m^3. La lunghezza della sua base è due volte la larghezza. Il materiale usato per costruire il fondo della scatola costa 10 euro al metro quadrato, il materiale per costruire le superfici laterali ha un costo di 6 euro per metro quadrato. Esprimere il costo dei materiali per costruire la scatola in funzione della larghezza della base.

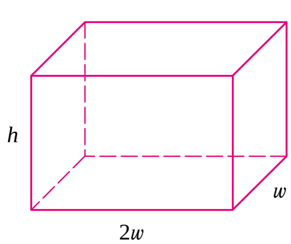


FIGURA 16

SOLUZIONE Introduciamo una nomenclatura come quella di Figura 16 chiamando w e $2w$ la larghezza e la lunghezza della base, rispettivamente, e h l'altezza.

L'area di base è $(2w)w = 2w^2$, e il costo in euro del materiale per la base è di $10(2w^2)$. Due superfici laterali hanno area $2wh$ e le altre due wh, così il costo del materiale per la superficie laterale totale è $6[2(wh) + 2(2wh)]$. Il costo totale è perciò

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Per esprimere C come funzione della sola w, abbiamo bisogno di eliminare h; per farlo usiamo il fatto che il volume totale è di 10 m^3. Perciò

$$w(2w)h = 10$$

che dà
$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

■ Per affrontare l'Esempio 5, può essere opportuno consultare i Princìpi di problem solving, riportati a pagina 88.

Sostituendo questo risultato nell'espressione per C, abbiamo
$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$
Perciò l'equazione
$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$
esprime C in funzione di w.

ESEMPIO 6 Trovare il dominio di ciascuna funzione.

(a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

SOLUZIONE

(a) Siccome la radice quadrata di un numero negativo non è definita (come numero reale), il dominio di f consiste in tutti i valori di x tali che $x + 2 \geq 0$, cioè, equivalentemente, $x \geq -2$, e ciò corrisponde al dominio $[-2, +\infty)$.

▲ Quando una funzione viene assegnata con una formula senza esplicitare il dominio, si intende che il dominio della funzione è l'insieme di tutti i valori reali per i quali la formula ha senso.

(b) Poiché
$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$
e le divisioni per 0 non sono definite, vediamo che $g(x)$ non è definita per $x = 0$ e per $x = 1$. Perciò il dominio di g è
$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$
che può anche essere scritto con una notazione che utilizza gli intervalli:
$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Il grafico di una funzione è una curva nel piano xy. Ma ci si può chiedere: quali curve nel piano xy sono grafici di funzione? La risposta è data dal test che segue.

Test delle rette verticali Una curva nel piano xy è il grafico di una funzione di x se e solo se nessuna retta verticale interseca il grafico più di una volta.

La veridicità del Test delle rette verticali è mostrata in Figura 17. Se ogni retta verticale $x = a$ interseca la linea una sola volta, nel punto (a, b), allora la funzione assume in corrispondenza di a un solo valore $f(a) = b$. Ma se una retta $x = a$ interseca due volte la curva nei punti (a, b) e (a, c), allora la curva non può rappresentare una funzione, perché una funzione non può assegnare due valori distinti in corrispondenza dell'ascissa a.

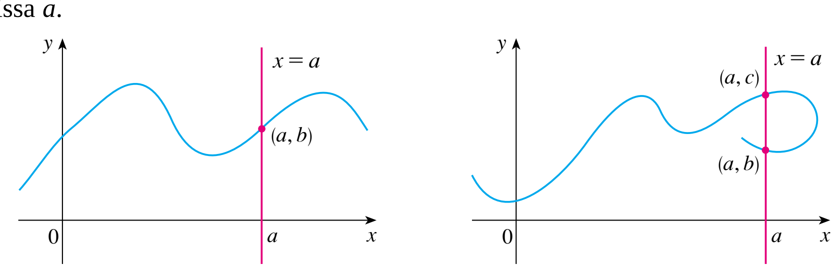


FIGURA 17

Per esempio, la parabola $x = y^2 - 2$ di Figura 18(a) non è il grafico di una funzione della variabile x perché, come si può ben osservare, esistono rette verticali che intersecano la parabola due volte. La parabola, comunque, contiene il grafico di *due* funzioni di x. Si osservi che $x = y^2 - 2$ implica $x + 2 = y^2$, e dunque $y = \pm\sqrt{x+2}$. Perciò le due metà – superiore e inferiore – della parabola sono il grafico delle funzioni $f(x) = \sqrt{x+2}$ [dall'Esempio 6(a)] e $g(x) = -\sqrt{x+2}$ [si vedano le Figure 18(b) e (c)]. Osserviamo che, invertendo i ruoli di x e y, l'equazione $x = h(y) = y^2 - 2$ definisce x come funzione di y (con y come variabile indipendente e x come variabile dipendente) e la stessa parabola rappresenta allora il grafico della funzione h.

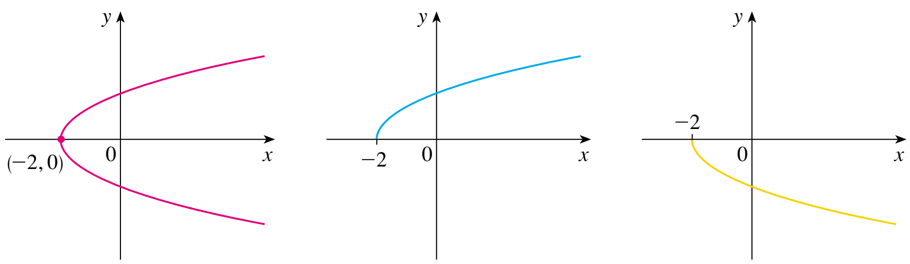


FIGURA 18 (a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x+2}$ (c) $y = -\sqrt{x+2}$

Funzioni definite a tratti

Le funzioni dei prossimi quattro esempi sono definite da formule diverse in diverse parti del loro dominio.

ESEMPIO 7 La funzione f è definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Valutare $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$ e disegnarne il grafico.

SOLUZIONE Ricordiamo che una funzione è una legge; per questa particolare funzione la legge è la seguente: prima si considera il valore dell'ingresso x. Se $x \leq 1$ allora il valore di $f(x)$ è $1 - x$. D'altro canto, se $x > 1$, allora il valore di $f(x)$ è x^2.

$$\text{Poiché } 0 \leqslant 1, \text{ si ha } f(0) = 1 - 0 = 1.$$

$$\text{Poiché } 1 \leqslant 1, \text{ si ha } f(1) = 1 - 1 = 0.$$

$$\text{Poiché } 2 > 1, \text{ si ha } f(2) = 2^2 = 4.$$

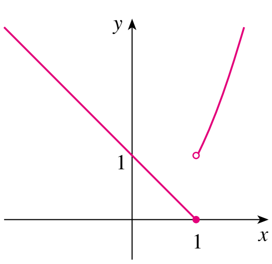


FIGURA 19

Come possiamo disegnare il grafico di f? Osserviamo che se $x \leq 1$, allora $f(x) = 1 - x$, perciò la parte del grafico che si trova alla sinistra della retta verticale $x = 1$ deve coincidere con la retta $y = 1 - x$, che ha coefficiente angolare -1 e intercetta sull'asse y pari a 1. Se $x > 1$, allora $f(x) = x^2$, così la parte di grafico di f a destra di $x = 1$ deve coincidere con il grafico di $y = x^2$, che è una parabola. Con queste osservazioni, possiamo disegnare il grafico richiesto in Figura 19. Il pallino pieno indica che $(1, 0)$ appartiene al grafico, il pallino vuoto indica che $(1, 1)$ non appartiene al grafico. ■

Il prossimo esempio di funzione definita a tratti è la funzione valore assoluto. Ricordiamo che il **valore assoluto** di un numero a, denotato da $|a|$, è la distanza sulla retta reale di a da 0. Le distanze sono sempre positive o nulle, perciò

▲ In Appendice A viene richiamato in modo esaustivo il concetto di valore assoluto.

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{per ogni } a$$

Per esempio:

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

In generale, si ha:

$$\boxed{\begin{aligned} |a| &= a \quad \text{se } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a \quad \text{se } a < 0 \end{aligned}}$$

(Ricordiamo che se a è negativo, allora $-a$ è positivo.)

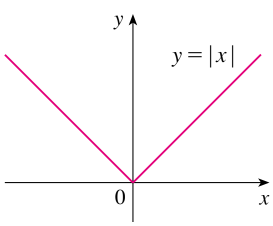


FIGURA 20

ESEMPIO 8 Disegnare il grafico della funzione valore assoluto $f(x) = |x|$

SOLUZIONE Da quanto osservato in precedenza, deduciamo che

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Usando un metodo identico a quello proposto con l'Esempio 7, otteniamo che $f(x)$ coincide con la retta $y = x$ alla destra dell'asse y, e con $y = -x$ alla sinistra dell'asse y, come in Figura 20.

ESEMPIO 9 Trovare una formula per la funzione f il cui grafico è riportato in Figura 21.

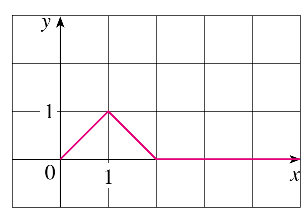


FIGURA 21

SOLUZIONE La retta che congiunge $(0,0)$ e $(1,1)$ ha coefficiente angolare $m = 1$ e intercetta $b = 0$, perciò la sua equazione è $y = x$. Dunque, per la parte di grafico che congiunge $(0,0)$ a $(1,1)$ abbiamo

$$f(x) = x \qquad \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

▲ La formula della retta passante per un punto con assegnato coefficiente angolare:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

è richiamata in Appendice B.

La retta che congiunge $(1,1)$ e $(2,0)$ ha coefficiente angolare $m = -1$, perciò ha equazione

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{ovvero} \qquad y = 2 - x$$

Dunque abbiamo

$$f(x) = 2 - x \qquad \text{se } 1 < x \leqslant 2$$

Inoltre, dal grafico deduciamo che f coincide con l'asse x per $x > 2$. Riassumendo le informazioni ottenute, abbiamo la seguente formula per f:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

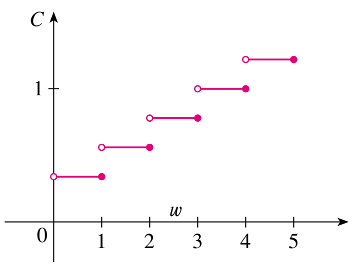


FIGURA 22

ESEMPIO 10 Nell'esempio C all'inizio di questo paragrafo abbiamo analizzato il costo C necessario alla spedizione di una raccomandata di peso p. In effetti si tratta di una funzione definita a tratti, perché, dalla tabella dei valori, si ha:

$$C(w) = \begin{cases} 0.34 & \text{se } 0 < w \leqslant 1 \\ 0.56 & \text{se } 1 < w \leqslant 2 \\ 0.78 & \text{se } 2 < w \leqslant 3 \\ 1.00 & \text{se } 3 < w \leqslant 4 \end{cases}$$

Il grafico corrispondente si trova in Figura 22. Si comprende la ragione per la quale funzioni simili sono dette **funzioni a gradino**: saltano da un valore al successivo. Queste funzioni saranno studiate nel Capitolo 2.

Simmetria

Se $f(x)$ è tale che $f(x) = f(-x)$ per ogni punto x del suo dominio, allora si dice che è una **funzione pari**. Per esempio, la funzione $f(x) = x^2$ è pari poiché

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

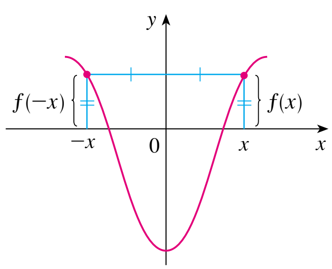


FIGURA 23
Una funzione pari

Il significato geometrico della definizione di parità per una funzione è che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y (Figura 23). Ciò implica che, se abbiamo disegnato il grafico di f per $x \geq 0$, possiamo ottenere il grafico intero semplicemente per riflessione rispetto all'asse y.

Se invece $f(x)$ è tale che $f(x) = -f(-x)$ per ogni punto x del suo dominio, allora si dice che è una **funzione dispari**. Per esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è dispari perché

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

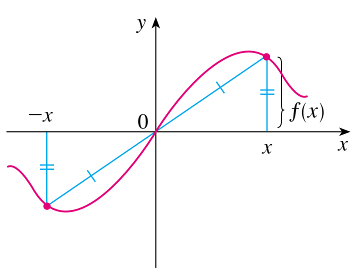


FIGURA 24
Una funzione dispari

Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine (Figura 24). Se conosciamo il grafico di f per $x \geq 0$, possiamo ottenere il tutto grafico con una rotazione di 180° intorno all'origine.

ESEMPIO 11 Stabilire se le seguenti funzioni sono, eventualmente, pari o dispari.
(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUZIONE

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Ne segue che $f(x)$ è una funzione dispari.

(b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

La funzione g è dunque pari.

(c) $$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Poiché $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$, si conclude che h non è né pari né dispari.

Troviamo i grafici delle funzioni dell'Esempio 11 in Figura 25. Si noti che il grafico della funzione h non è simmetrico né rispetto all'asse y, né rispetto all'origine.

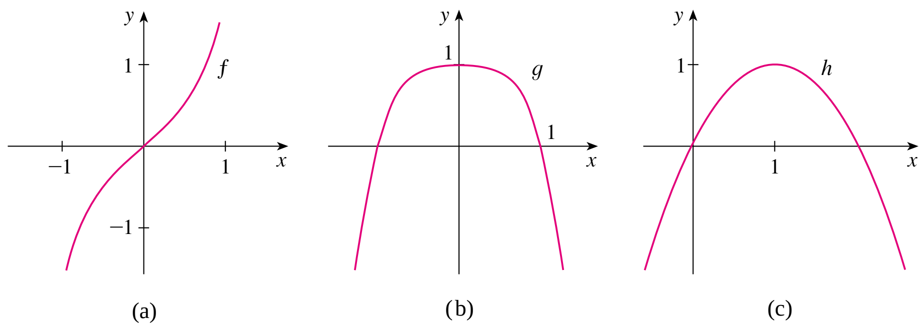


FIGURA 25

Funzioni crescenti e decrescenti

Il grafico in Figura 26 cresce da A a B, decresce da B a C e cresce da C a D. Si dice pertanto che la funzione f è crescente nell'intervallo $[a, b]$, decrescente in $[b, c]$ e crescente in $[c, d]$. Si noti che se x_1 e x_2 sono una qualunque coppia di punti tra a e b tali che $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) < f(x_2)$. Usiamo questa proprietà per definire una funzione crescente (decrescente) su un intervallo.

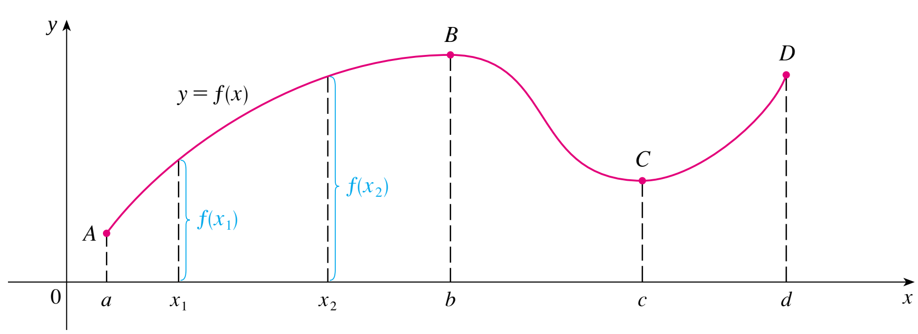


FIGURA 26

Una funzione si dice **crescente** in un intervallo I se

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{per } x_1 < x_2 \text{ in tutto } I$$

Si dice **decrescente** in I se

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{per } x_1 < x_2 \text{ in tutto } I$$

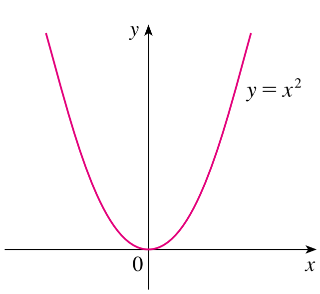


FIGURA 27

Nella definizione di funzione crescente (e analogamente in quella di funzione decrescente) è importante capire che la disuguaglianza $f(x_1) < f(x_2)$ deve essere verificata per *ogni* coppia di numeri x_1 e x_2 in I con $x_1 < x_2$.

Osservando la Figura 27, si conclude che la funzione $f(x) = x^2$ è decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0]$ e crescente in $[0, +\infty)$.

1.1 Esercizi

1. È dato il grafico di f.

(a) Determinare il valore di $f(-1)$.

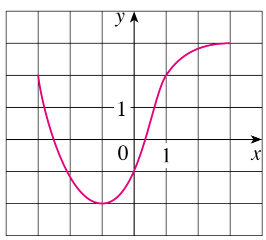
(b) Stimare il valore di $f(2)$.

(c) Per quali valori di x risulta $f(x) = 2$?

(d) Stimare i valori x tali che $f(x) = 0$.

(e) Determinare il dominio e l'immagine di f.

(f) Su quale intervallo f è crescente?



2. Sono dati i grafici di f e di g.

(a) Determinare i valori di $f(-4)$ e di $g(3)$.

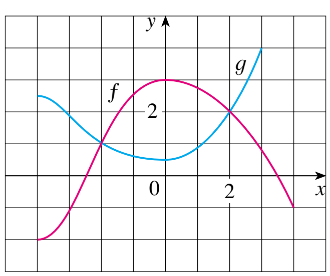
(b) Per quali valori di x è $f(x) = g(x)$?

(c) Stimare la soluzione dell'equazione $f(x) = -1$.

(d) Su quale intervallo f è decrescente?

(e) Determinare il dominio e l'immagine di f.

(f) Determinare il dominio e l'immagine di g.

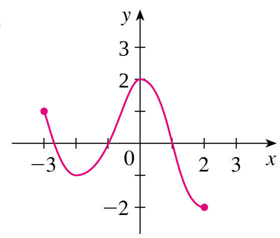


3. Le Figure 1, 11 e 12 sono state rilevate da apparecchiature del Dipartimento di Geologia dell'Università della California a Los Angeles. Stimare qual è stata l'immagine dell'accelerazione verticale del suolo, quella nord-sud e quella est-ovest durante il terremoto del 1994.

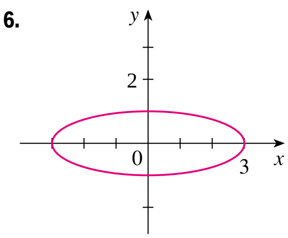
4. In questo paragrafo sono stati discussi esempi di funzioni tratti da esperienze che si possono definire ordinarie: la popolazione come funzione del tempo, il costo di una raccomandata come funzione del suo peso, la temperatura dell'acqua come funzione del tempo. Fornire altri tre esempi tratti dall'esperienza quotidiana di funzioni descritte verbalmente. Cosa è possibile dire a proposito del dominio e dell'immagine di queste funzioni? Se possibile, tracciare uno schizzo del loro grafico.

5–8 ■ Determinare quale dei seguenti grafici rappresenta una funzione della variabile x. In questo caso, determinare il dominio e l'immagine della funzione.

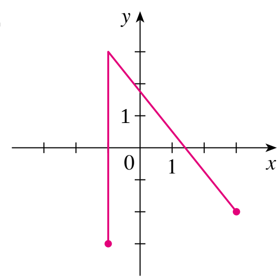
5.



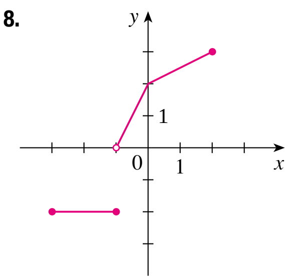
6.



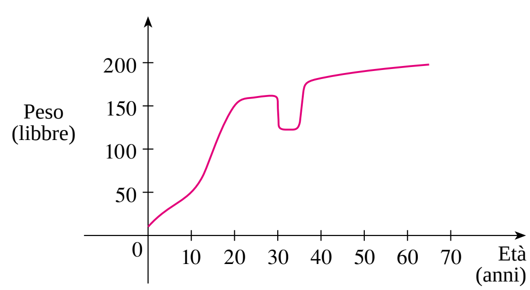
7.



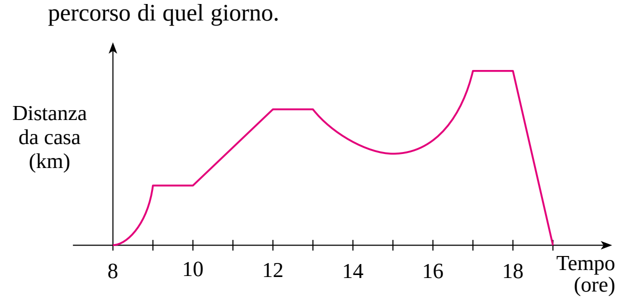
8.



9. Il grafico seguente rappresenta il peso in libbre di una persona in funzione dell'età. Descrivere a parole la variazione del peso di questa persona negli anni. Cosa pensate sia successo a questa persona intorno ai 30 anni?



10. Il grafico seguente mostra la distanza da casa di un piazzista, come funzione del tempo, in una certa giornata. Descrivere a parole quali informazioni si possono trarre dal grafico circa il percorso di quel giorno.



11. Si metta del ghiaccio in un bicchiere, successivamente lo si riempia di acqua fredda, quindi si appoggi il bicchiere su un piano. Descrivere la variazione della temperatura dell'acqua nel tempo. Disegnare un grafico approssimativo della temperatura dell'acqua come funzione del tempo trascorso.

12. Disegnare un grafico approssimativo del numero delle ore di luce in funzione dei mesi dell'anno.

13. Disegnare un grafico approssimativo che rappresenti la temperatura esterna di una tipica giornata di primavera in funzione dell'ora del giorno.

14. Dopo aver messo una pizza surgelata in forno a cuocere per un'ora, e averla lasciata raffreddare per qualche minuto, disegnare un grafico che descriva il variare della temperatura della pizza in funzione del tempo.

15. Un giardiniere taglia l'erba di un prato ogni mercoledì pomeriggio. Disegnare un grafico che ritragga la crescita dei fili d'erba in un mese.

16. Un aeroplano decolla da un aeroporto e atterra un'ora dopo in un altro aeroporto, distante 400 km. Se t rappresenta il tempo, in minuti, dalla partenza, siano $x(t)$ e $y(t)$ rispettivamente la distanza percorsa orizzontalmente e l'altitudine dell'aeroplano.
(a) Disegnare un grafico plausibile per $x(t)$.
(b) Disegnare un grafico plausibile per $y(t)$.
(c) Disegnare un grafico plausibile per la velocità rispetto a terra.
(d) Disegnare un grafico plausibile per la velocità verticale.

17. Il numero medio N, espresso in migliaia, di sottoscrittori di abbonamenti per telefoni cellulari in Malesia è riportato in tabella.

t	1991	1993	1995	1997
N	132	304	873	2461

(a) Usare i dati per disegnare un grafico di N in funzione di t.
(b) Utilizzare il grafico per stimare il numero di abbonati nel 1994 e nel 1996.

18. Sono stati fatti dei rilevamenti della temperatura esterna a Il Cairo (Egitto) nel luglio 1999, da mezzanotte sino alle 14, ogni due ore. Il tempo è misurato in ore, la temperatura in gradi centigradi.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	23	26	29	32	33	33	32	32

(a) Usare questi dati per disegnare un grafico di T in funzione di t.
(b) Stimare la temperatura alle 5 del mattino.

19. Se $f(x) = 3x^2 - x + 2$, trovare $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a+1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$ e $f(a+h)$.

20. Un pallone sferico di raggio pari a r ha volume $4/3\pi r^3$. Trovare la funzione che rappresenta la quantità di aria necessaria per portare il pallone ad avere un raggio $r + 1$.

21–22 ■ Trovare $f(2+h)$, $f(x+h)$ e $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, con $h \neq 0$.

21. $f(x) = x - x^2$

22. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

23–27 ■ Trovare il dominio delle funzioni.

23. $f(x) = \dfrac{x}{3x - 1}$

24. $f(x) = \dfrac{5x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

25. $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$

26. $g(u) = \sqrt{u} + \sqrt{4 - u}$

27. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

28. Trovare il dominio e l'immagine e disegnare il grafico di $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

29–36 ■ Trovare il dominio delle funzioni e disegnarne il grafico.

29. $f(t) = \frac{1}{2}t - 1$

30. $F(x) = |2x + 1|$

31. $G(x) = \dfrac{3x + |x|}{x}$

32. $H(t) = \dfrac{4 - t^2}{2 - t}$

33. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leqslant 0 \\ x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x < -1 \\ 3 - x & \text{se } x \geqslant -1 \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leqslant -1 \\ 3x + 2 & \text{se } |x| < 1 \\ 7 - 2x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

37–42 ■ Trovare un'espressione per la funzione il cui grafico è la curva data.

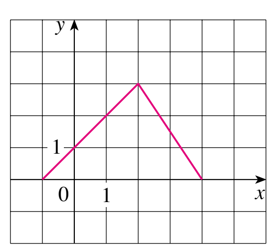
37. Il segmento congiungente i punti (–2, 1) e (4, –6).

38. Il segmento congiungente i punti (–3, –2) e (6, 3).

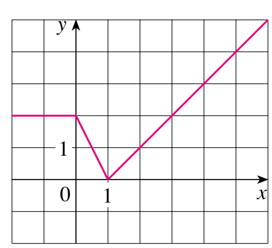
39. La parte inferiore della parabola $x + (y - 1)^2 = 0$.

40. La metà superiore del cerchio $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

41.



42.



43–47 ■ Determinare la formula delle funzioni descritte e indicare il loro dominio.

43. Un rettangolo ha perimetro pari a 20 m. Esprimere l'area del rettangolo in funzione della lunghezza di uno dei suoi lati.

44. Un rettangolo ha area pari a 16 m^2. Esprimere il perimetro del rettangolo in funzione della lunghezza di uno dei suoi lati.

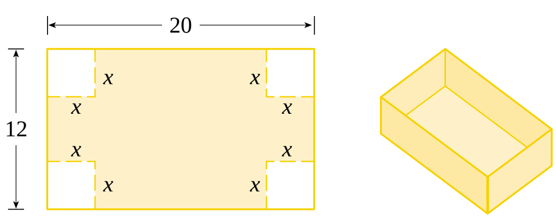
45. Esprimere l'area di un triangolo equilatero in funzione della lunghezza di un suo lato.

46. Determinare l'area di un cubo in funzione del volume.

47. Una scatola aperta, di volume pari a 2 m^3, ha base quadrata. Determinare l'area della scatola in funzione della lunghezza del lato di base.

48. Una finestra normanna ha la forma di un rettangolo sovrastato da un semicerchio. Il perimetro della finestra è di 9 metri. Esprimere l'area A della finestra in funzione della sua larghezza x.

49. Una scatola aperta viene costruita a partire da un pezzo di cartone di dimensioni 12 dm per 20 dm tagliando via dai vertici quattro quadrati di lato x e ripiegando in alto i lembi, come in figura. Esprimere il volume V della scatola in funzione della sua altezza x.



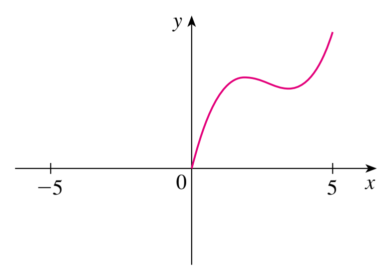
50. La tariffa applicata da una certa compagnia di taxi americana è di due dollari per il primo chilometro e di altri 20 cent per ogni successivo decimo di kilometro (anche parzialmente percorso). Esprimere il costo C di una corsa in funzione della sua lunghezza x, con x che varia da 0 a due kilometri, e disegnare il grafico di tale funzione.

51. In un certo Paese, si istituisce una tassa sul reddito nel modo seguente. Redditi (in valuta nazionale) fino a 10 000 000 non sono tassati. I redditi da 10 000 000 a 20 000 000 sono tassati al 10%. Sopra i 20 000 000 la tassa arriva al 15%.
(a) Disegnare un grafico dell'aliquota d'imposta R in funzione del reddito I.
(b) Quanto viene tassato un reddito pari a 14 000 000? E uno pari a 26 000 000?
(c) Disegnare un grafico della tassa T rispetto al reddito I.

52. Le funzioni dell'Esempio 10 e degli Esercizi 50 e 51(a) sono dette *funzioni a gradino*, poiché il loro grafico è simile a quello di una scala. Dare altri esempi di tali funzioni.

53. (a) Se il punto $(5, 3)$ appartiene al grafico di una funzione pari, quale altro punto deve necessariamente appartenere al grafico?
(b) Se il punto $(5, 3)$ appartiene al grafico di una funzione dispari, quale altro punto deve necessariamente appartenere al grafico?

54. Una funzione f ha dominio $[-5, 5]$; parte del suo grafico è mostrata in figura.
(a) Completare il grafico di f nel caso sia dispari.
(b) Completare il grafico di f nel caso sia pari.



55–60 ■ Determinare se le funzioni seguenti sono pari, dispari o né pari né dispari. Nel caso siano pari o dispari, sfruttare questa proprietà per disegnare il grafico.

55. $f(x) = x^{-2}$

56. $f(x) = x^{-3}$

57. $f(x) = x^2 + x$

58. $f(x) = x^4 - 4x^2$

59. $f(x) = x^3 - x$

60. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

1.2 Modelli matematici

Un **modello matematico** è una descrizione, in termini matematici, quindi spesso mediante un'equazione o una funzione, di un fenomeno reale, quale la numerosità di una popolazione di individui, la domanda di un certo prodotto, la velocità di un oggetto in caduta libera, la concentrazione di un reagente in una reazione chimica, l'aspettativa di vita di una persona alla nascita. Un modello deve servire a comprendere il fenomeno e anche a fornire previsioni sul suo andamento futuro.

La Figura 1 illustra come si costruisce un modello matematico. Da una prima analisi di un problema del mondo reale si possono individuare quali sono le variabili indipendenti e quali quelle dipendenti che intervengono in quel fenomeno; naturalmente può essere necessario fare delle assunzioni che semplifichino la struttura del fenomeno in modo da renderlo matematicamente trattabile. Con le conoscenze acquisite sull'andamento del fenomeno si possono ottenere delle equazioni che correlino le diverse variabili. Se però non si può far riferimento ad alcuna conoscenza fisica a priori che possa fungere da traccia, occorre raccogliere ed esaminare un buon numero di dati in modo da ottenerne una rappresentazione grafica e da discernere se questa descrizione del fenomeno presenti un andamento o una forma peculiare. Il grafico può in effetti suggerire quale formula algebrica è più adatta a descrivere il fenomeno.

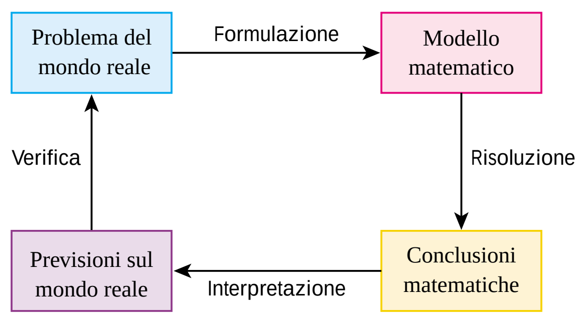


FIGURA 1
Il processo di formulazione di un modello

Il secondo passo è quello di applicare i procedimenti matematici noti (e studiati nel corso di questo testo) al modello che stiamo costruendo al fine di ricavare delle conclusioni matematiche. Il terzo passo è quello di trarre adeguate conclusioni dalla risoluzione delle equazioni che descrivono il modello e soprattutto di interpretarle in chiave fisico-sperimentale, riguardo al fenomeno reale che si sta studiando, facendo anche delle previsioni sull'andamento di tale fenomeno. Se le previsioni non combaciano con la realtà, è necessario ridefinire il modello e incominciare un nuovo ciclo.

Un modello matematico non è mai una rappresentazione completamente accurata della realtà, è una sua *idealizzazione*. Un buon modello semplifica sufficientemente la realtà, in modo da dover gestire calcoli abbordabili, ma è accurato per quanto riguarda le conclusioni che se ne devono trarre. È quindi fondamentale capire quali sono i limiti di validità, imposti dalle nostre semplificazioni, entro i quali il modello proposto è un buon modello.

Esistono diversi tipi di funzioni che vengono spesso usate nella costruzione di modelli matematici. Nel seguito, presentiamo e discutiamo alcune di queste funzioni e forniamo esempi di situazioni appropriatamente modellizzate da tali funzioni.

Modelli lineari

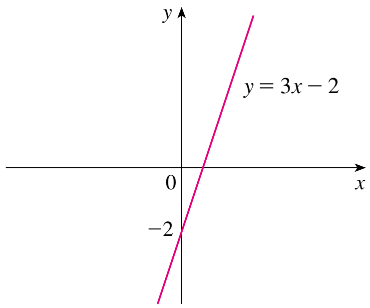
▲ La geometria analitica delle rette è sintetizzata in Appendice B.

Dicendo che y è una *funzione lineare* di x, si intende che il grafico di $y = f(x)$ è una retta, perciò è possibile sfruttare la formula

$$y = f(x) = mx + b$$

che esprime una retta tramite il suo coefficiente angolare m e l'intercetta b sull'asse y.

Il comportamento caratteristico delle funzioni lineari è quello di crescere in modo costante. Per esempio, la Figura 2 mostra il grafico della funzione lineare $f(x) = 3x - 2$ e una tabella di valori della funzione. Si osservi che ogni qualvolta x cresce di 0.1, il valore di $f(x)$ cresce di 0.3. Perciò $f(x)$ cresce tre volte più velocemente di x. Dunque la pendenza del grafico $y = 3x - 2$, che è 3, può essere interpretata come il tasso di crescita di y rispetto a x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

FIGURA 2

ESEMPIO 1

(a) Una corrente di aria fredda che si muove verso l'alto si espande e si raffredda. Se la temperatura a terra è di circa 20 °C e la temperatura a un kilometro di altitudine è di 10 °C, esprimere, utilizzando un modello lineare, la temperatura T (in °C) in funzione dell'altitudine h (in km).
(b) Disegnare il grafico ottenuto nella parte (a); cosa rappresenta la pendenza della retta?
(c) Qual è la temperatura a un'altitudine di 2.5 km?

SOLUZIONE

(a) Se assumiamo che T sia una funzione lineare di h, abbiamo

$$T = mh + b$$

Da $T = 20$ per $h = 0$ si ricava

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

Dunque l'intercetta sull'asse y è $b = 20$.

Sappiamo inoltre che $T = 10$ quando $h = 1$, per cui

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

La pendenza della retta risulta essere $m = 10 - 20 = -10$ e la funzione lineare che la rappresenta è

$$T = -10h + 20$$

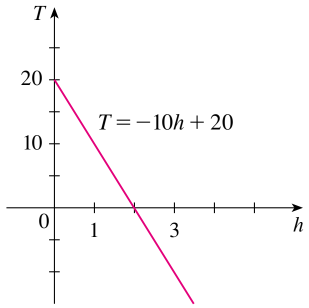


FIGURA 3

(b) Il grafico ottenuto dalla formula della parte (a) è rappresentato in Figura 3. La sua pendenza è $m = -10$ °C/km, e rappresenta l'indice di variazione della temperatura con l'altitudine.

(c) Quando $h = 2.5$ km, la temperatura è

$$T = -10(2.5) + 20 = -5\text{ °C}$$

Se non conosciamo alcuna legge fisica che ci possa guidare nella formulazione di un modello che descriva l'andamento di un certo insieme di dati, possiamo procedere costruendo un modello empirico, basato esclusivamente sulle caratteristiche intrinseche dell'insieme di dati a disposizione. Cerchiamo dunque una curva che "combaci" con i dati, cioè che riproduca l'andamento sostanziale dei dati.

TABELLA 1

Anno	Livello CO_2 (in ppm)
1980	338.5
1982	341.0
1984	344.3
1986	347.0
1988	351.3
1990	354.0
1992	356.3
1994	358.9
1996	362.7
1998	366.7

ESEMPIO 2 La Tabella 1 riporta il livello medio di biossido di carbonio, misurato in parti per milione, dal 1980 al 1998 al Mauna Loa Observatory. Usare questi dati per costruire un modello per descrivere l'incremento del livello di biossido di carbonio.

SOLUZIONE Usiamo i dati riassunti in Tabella 1 per costruire il grafico di Figura 4, dove t rappresenta il tempo (in anni) e C rappresenta il livello di CO_2.

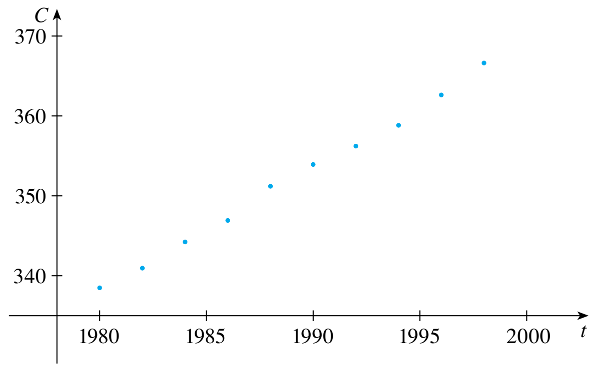


FIGURA 4
Diagramma a punti per il livello medio di CO_2

Si osservi che i dati sembrano disposti lungo una linea retta, perciò in questo caso appare naturale scegliere un modello lineare. Tuttavia vi sono moltissime rette che potrebbero approssimare questi punti; tra le tante, una scelta possibile è la retta che passa per il primo e per l'ultimo punto. La pendenza di questa retta è

$$\frac{366.7 - 338.5}{1998 - 1980} = \frac{28.2}{18} \approx 1.56667$$

e la sua equazione è

$$C - 338.5 = 1.56667(t - 1980)$$

ovvero

$$C = 1.56667t - 2763.51 \qquad \boxed{1}$$

L'Equazione 1 assegna un possibile modello lineare che descrive l'incremento del biossido di carbonio (Figura 5).

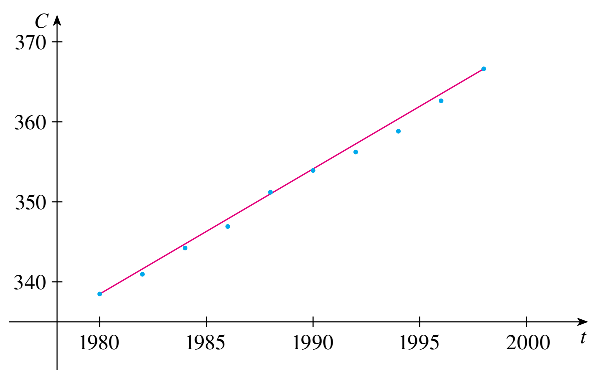


FIGURA 5
Modello di approssimazione lineare che passa per il primo e l'ultimo punto

Sebbene questa modellizzazione segua l'andamento dei dati in modo ragionevolmente buono, assegna quasi costantemente valori di CO_2 che sono superiori ai valori

▲ Un computer o una calcolatrice grafica trovano la retta di regressione con il metodo dei minimi quadrati, che consiste nel minimizzare la somma dei quadrati delle distanze verticali fra i punti dati e la retta. I dettagli sono spiegati nel Volume 2.

reali. Si può ottenere un modello migliore utilizzando i metodi statistici della *regressione lineare*. Se si dispone di un computer si possono inserire i dati e scegliere l'opzione per la regressione lineare (con Maple il comando è `fit[leastsquare]`, mentre con Mathematica si usa il comando `Fit`.) Il software restituisce la pendenza e l'intercetta sull'asse y:

$$m = 1.543333 \qquad b = -2717.62$$

Perciò il modello che descrive livello di CO_2 è il seguente:

$$C = 1.543333t - 2717.62 \tag{2}$$

In Figura 6 sono stati disegnati sia la retta di regressione sia l'insieme dei dati. Confrontandoli con la Figura 5, possiamo osservare che l'approssimazione è migliore di quella data dal modello lineare precedente.

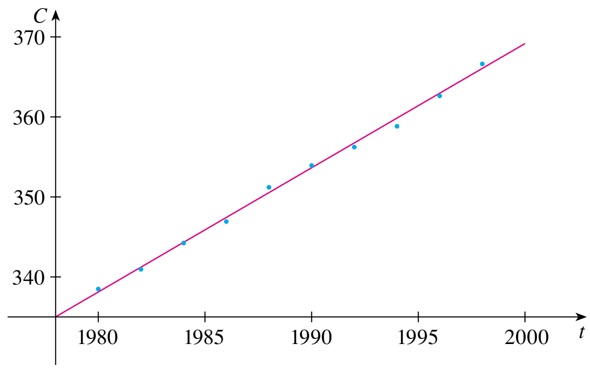


FIGURA 6
La retta di regressione

ESEMPIO 3 Usare il modello lineare dato dall'Equazione 2 per stimare il livello medio di CO_2 nel 1987 e per predire quello del 2010. Secondo questa modellizzazione, quando il livello di CO_2 oltrepasserà la soglia delle 400 parti per milione?

SOLUZIONE Usando l'Equazione 2 con $t = 1987$, possiamo stimare che il livello medio di CO_2 nel 1987 è stato

$$C(1987) = (1.543333)(1987) - 2717.62 \approx 348.98$$

Questo è un esempio di *interpolazione*, perché abbiamo stimato un valore che si trova *tra* due rilevazioni. (Il laboratorio che ha effettuato i rilevamenti ha fornito come dato corrispondente al 1987 il valore di 348.8 ppm, perciò la stima ottenuta è piuttosto accurata.)

Con $t = 2010$ si ha

$$C(2010) = (1.543333)(2010) - 2717.62 \approx 384.48$$

Si può dunque predire che il livello di CO_2 nel 2010 sarà di 384.5 ppm. Questo è invece un esempio di *estrapolazione*, perché è stato predetto un valore che è *fuori* dalla regione di osservabilità. Di conseguenza c'è maggiore incertezza riguardo alla previsione.

Usando l'Equazione 2, si ha facilmente che il livello di CO_2 supera i 400 ppm quando

$$1.543333t - 2717.62 > 400$$

Risolvendo la disequazione, si ottiene:

$$t > \frac{3117.62}{1.543333} \approx 2020.06$$

Perciò il livello supererà la soglia di 400 ppm nell'anno 2020. Predizioni di questo tipo sono molto rischiose perché utilizzano dati che sono temporalmente molto distanti dalle osservazioni.

Polinomi

Una funzione P è detta **polinomio** se

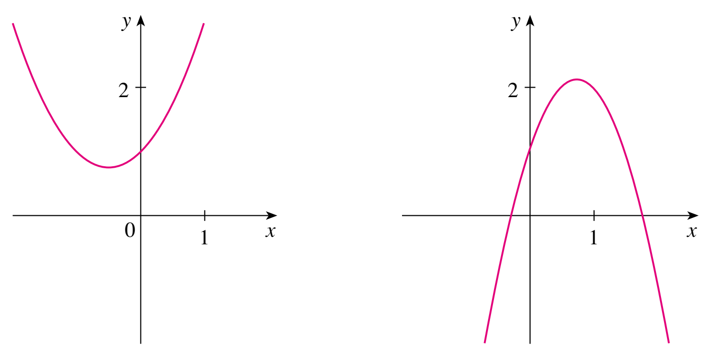
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dove n è un intero non negativo e i numeri a_0, a_0, a_1, a_2,... a_n sono costanti dette **coefficienti** del polinomio. Il dominio di ogni funzione polinomiale è $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Se il primo coefficiente diverso da zero è a_n, allora il **grado** del polinomio è n. Per esempio, la funzione

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

è un polinomio di sesto grado.

Un polinomio di primo grado ha la forma $P(x) = ax + b$ ed è quindi una funzione lineare. Un polinomio di secondo grado ha la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ ed è detto essere una **funzione quadratica**. Il grafico di P è quello di una parabola, ottenuta per traslazione della parabola $y = ax^2$, come vedremo nel prossimo paragrafo. La parabola ha concavità verso l'alto o verso il basso a seconda che sia $a > 0$ oppure $a < 0$ (Figura 7).



(a) $y = x^2 + x + 1$ (b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

FIGURA 7
I grafici delle funzioni quadratiche sono delle parabole

Un polinomio di grado 3 ha la forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ed è chiamato **funzione cubica**. La Figura 8 mostra il grafico di una funzione cubica nella parte (a) e i grafici di polinomi di grado 4 e 5 nelle parti (b) e (c). Vedremo più avanti la ragione per la quale i grafici hanno tale forma.

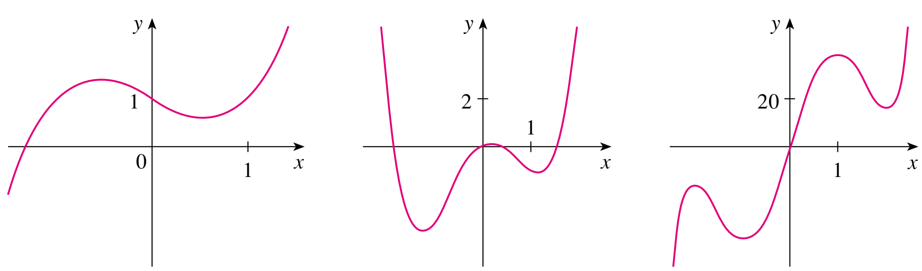


FIGURA 8 (a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

I polinomi sono spesso usati per modellizzare il comportamento di diverse grandezze che ricorrono nella descrizione di fenomeni naturali e sociali. Per esempio, nel Paragrafo 3.3 spiegheremo perché gli economisti usano molto spesso un polinomio $P(x)$ per rappresentare il costo di produzione di x unità di una merce. Nell'esempio che segue, invece, una funzione quadratica viene usata per modellizzare la caduta di un pallone.

TABELLA 2

Tempo (secondi)	Altezza (metri)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

ESEMPIO 4 Un pallone viene fatto cadere dall'alto della terrazza sovrastante un grattacielo, a 450 m di altezza rispetto al terreno. L'altezza h alla quale si trova il pallone viene rilevata a intervalli di 1 secondo, e i risultati sono riassunti in Tabella 2. Trovare un modello che interpoli opportunamente i dati e usarlo per predire l'istante in cui il pallone toccherà terra.

SOLUZIONE Disegniamo in Figura 9 un grafico discreto che descriva la posizione della palla. Si osserva immediatamente che un modello lineare non è opportuno. Invece, la somiglianza con il grafico di una parabola suggerisce la possibilità di adottare un modello quadratico. Con un calcolatore (che usi il metodo dei minimi quadrati) si ottiene il modello che segue:

$$h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2 \tag{3}$$

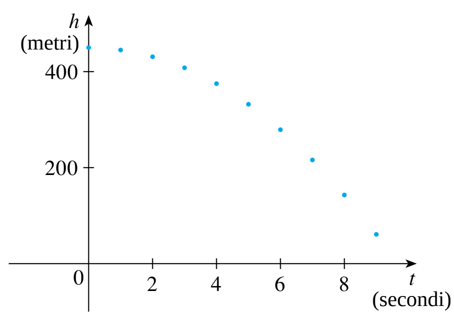


FIGURA 9
Grafico discreto per la caduta di un pallone

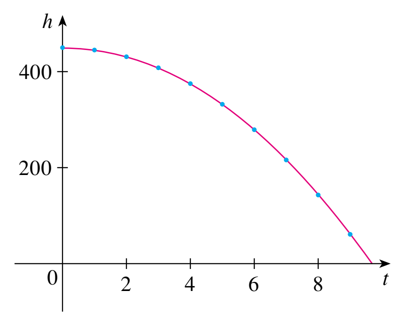


FIGURA 10
Modello quadratico per la caduta di un pallone

In Figura 10 abbiamo disegnato il grafico dell'Equazione 3 assieme ai punti che rappresentano i dati; si vede che il modello quadratico fornisce una approssimazione molto buona.

La palla tocca terra quando $h = 0$, perciò risolviamo l'equazione quadratica

$$-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0$$

Si ottiene:

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}$$

La radice positiva è $t \approx 9.67$, perciò possiamo prevedere che la palla toccherà terra dopo una caduta di circa 9.7 secondi.

Potenze

Una funzione del tipo $f(x) = x^a$ dove a è una costante, è detta **funzione potenza**. Consideriamo i vari casi.

(i) $a = n$, dove n è un intero positivo

In Figura 11 sono rappresentati i grafici di $f(x) = x^n$ con $n = 1, 2, 3, 4$ e 5. (Si tratta di polinomi a un solo termine, ossia di monomi.) Conosciamo già il grafico della retta $y = x$, che passa per l'origine e ha coefficiente angolare 1, e della parabola $y = x^2$ (Esempio 2(b), Paragrafo 1.1).

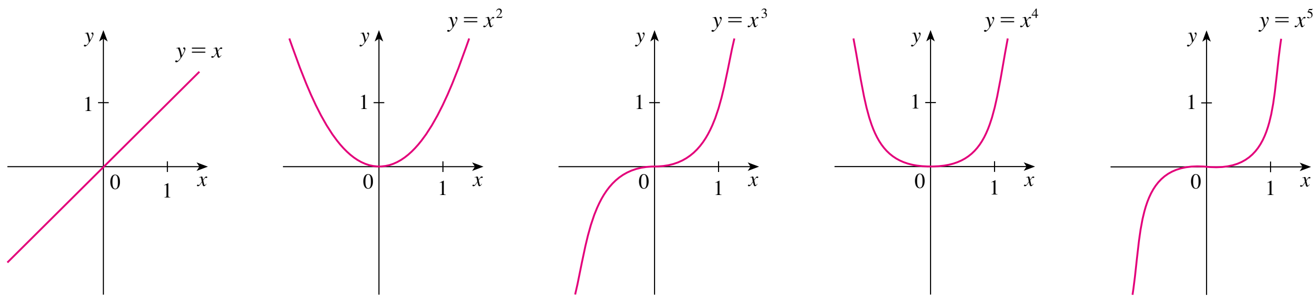


FIGURA 11 Grafici di $f(x) = x^n$ per $n = 1, 2, 3, 4, 5$

La forma generale del grafico di $y = x^n$ dipende da n, che può essere pari o dispari. Se n è pari, allora $f(x) = x^n$ è una funzione pari e il suo grafico è simile a quello della parabola $y = x^2$. Se n è dispari, allora $f(x) = x^n$ è una funzione dispari e il suo grafico è simile a quello di $y = x^3$. Nella Figura 12, si osservi comunque che al crescere di n il grafico di $y = x^n$ diventa sempre più piatto vicino a 0 e diventa sempre più pendente quando $|x| \geq 1$. (Se x è piccola, allora x^2 è più piccolo, x^3 è ancora più piccolo, x^4 è ancora più piccolo, e così via.)

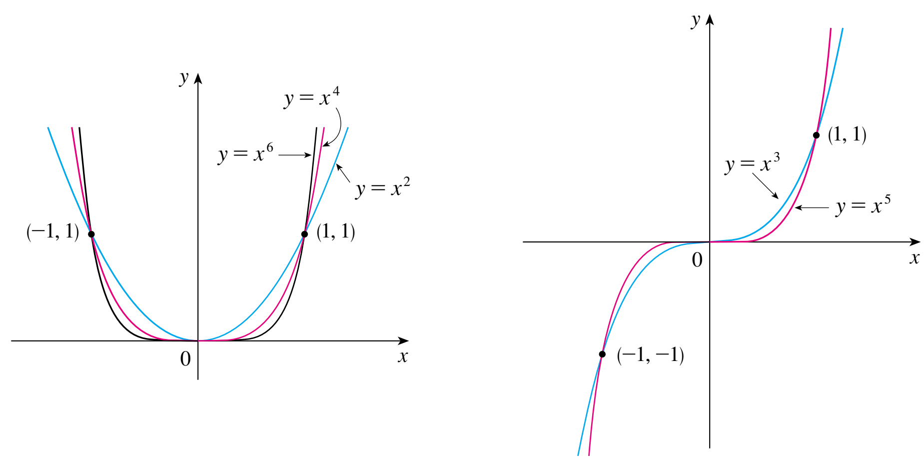
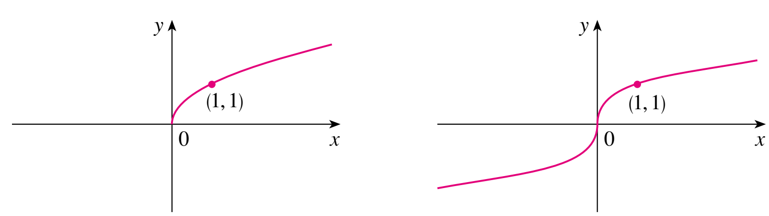


FIGURA 12
Famiglie di funzioni potenza

(ii) *a* = 1/*n*, dove è un intero positivo

La funzione $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ è una **funzione radice** o radicale. Per $n = 2$ è la radice quadrata $f(x) = \sqrt{x}$, il cui dominio è $[0, +\infty)$ e il cui grafico è la metà superiore della parabola $x = y^2$ [Figura 13(a)]. Per gli altri valori pari di n il grafico di $y = \sqrt[n]{x}$ è simile a quello di $y = \sqrt{x}$. Per $n = 3$ abbiamo il grafico della radice cubica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ il cui dominio è tutto $\mathbb{R}$ (ogni numero reale ha radice cubica) e il cui grafico è disegnato in Figura 13(b). Il grafico di $y = \sqrt[n]{x}$ per n dispari ($n > 3$) è simile a quello di $y = \sqrt[3]{x}$.



(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

FIGURA 13
Grafici di funzioni potenza

(iii) $a = -1$

La Figura 14 mostra il grafico della **funzione reciproca** $f(x) = x^{-1} = 1/x$. Il grafico di equazione $y = 1/x$ (ovvero $xy = 1$) rappresenta un'iperbole equilatera con gli assi coordinati come asintoti.

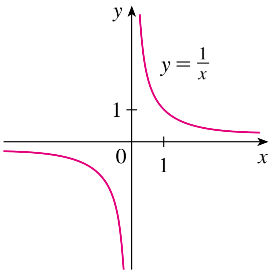


FIGURA 14
La funzione reciproca

Una funzione di questo tipo la si incontra per esempio nella legge di Boyle, secondo la quale il volume di un gas a temperatura costante è inversamente proporzionale alla pressione:

$$V = \frac{C}{P}$$

dove C è una costante. Il grafico di V in funzione di P (Figura 15) ha la forma della parte destra del grafico disegnato in Figura 14.

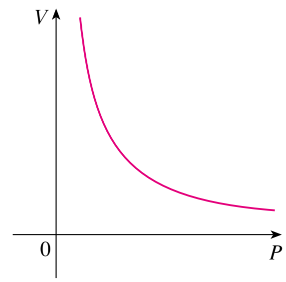


FIGURA 15
Il volume di un gas perfetto in funzione della pressione a temperatura costante

Altri casi nei quali una funzione potenza viene utilizzata per schematizzare dei fenomeni fisici o chimici saranno presentati nell'Esercizio 20.

Funzioni razionali

Una **funzione razionale** è un rapporto di due polinomi:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove P e Q sono polinomi. Il dominio è costituito da tutti i valori di x tali che $Q(x) \neq 0$. Un semplice esempio di funzione razionale è la funzione $f(x) = 1/x$, il cui dominio è $\{x \mid x \neq 0\}$; si tratta della funzione reciproco disegnata in Figura 14. La funzione

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

è una funzione razionale con dominio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. Il suo grafico è rappresentato in Figura 16.

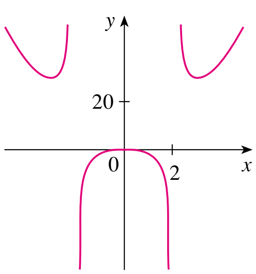


FIGURA 16
$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

Funzioni algebriche

Una funzione f è detta **funzione algebrica** se può essere costruita usando operazioni algebriche (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, estrazione di radice) a partire da funzioni polinomiali. Ogni funzione razionale è algebrica. Ecco altri due esempi:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Nel disegnare i grafici di funzione algebriche, nel Capitolo 4, vedremo che questi possono avere le forme più diverse: in Figura 17 sono illustrate alcune possibilità.

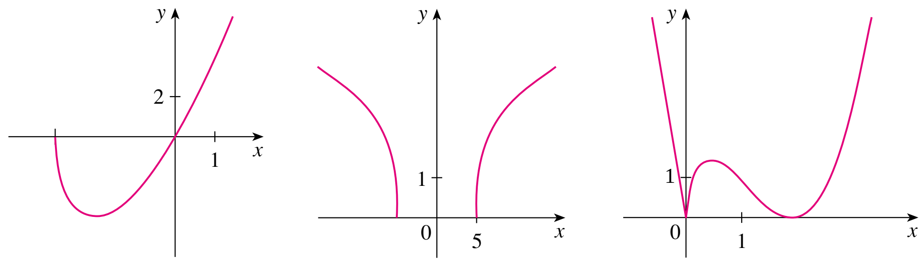


FIGURA 17 (a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

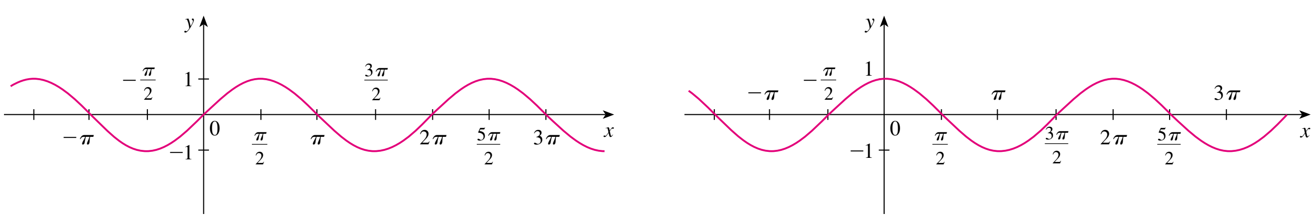
Anche nella teoria della relatività si può trovare un esempio di funzione algebrica. La massa di una particella con velocità v è

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

dove m_0 è la massa a riposo e $c = 3.0 \times 10^5$ km/s è la velocità della luce nel vuoto.

Funzioni trigonometriche

Le formule della trigonometria e le funzioni trigonometriche sono riassunte in Appendice C e in Appendice L. Nel calcolo si usa sempre misurare gli angoli in radianti (tranne quando espressamente indicato). Per esempio, quando si usa la funzione $f(x) = \sin x$, si intende che $\sin x$ rappresenta la misura del seno dell'angolo che misura x radianti. La Figura 18 mostra i grafici del seno e del coseno.



(a) $f(x) = \sin x$ (b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 18

Si osservi che sia il seno sia il coseno hanno dominio pari a (– ∞, + ∞) e immagine [–1, 1]. Quindi per ogni valore di x abbiamo

$$\boxed{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

o, equivalentemente, in valore assoluto:

$$|\sin x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

Inoltre, gli zeri della funzione seno ricorrono per multipli interi di π; ossia:

$$\sin x = 0 \qquad \text{per} \quad x = n\pi, \ n \ \text{intero}$$

Un'importante proprietà del seno e del coseno è di essere funzioni periodiche, con periodo 2π. Ciò significa che, per ogni valore di x:

$$\boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x}$$

La natura periodica di queste funzioni le rende adatte a descrivere fenomeni ripetitivi quali maree, moti di molle oscillanti, onde sonore. Nell'Esempio 4, Paragrafo 1.3, vedremo per esempio che il numero di ore di luce in una città t giorni dopo il primo gennaio è dato dalla funzione

$$L(t) = 12 + 2.8 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

La funzione tangente è legata al seno e al coseno dall'equazione

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

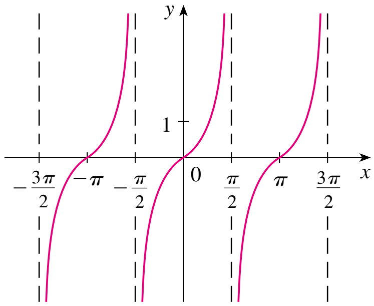


FIGURA 19
$y = \tan x$

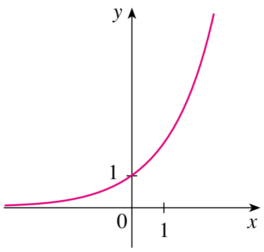
e il suo grafico è mostrato in Figura 19; non è definito quando $\cos x = 0$, ossia quando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ La sua immagine è $(-\infty, +\infty)$. Si osservi che la tangente ha periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{per ogni } x$$

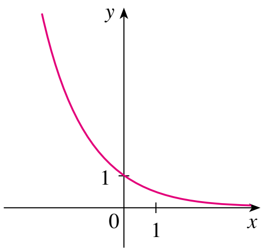
Le altre tre funzioni trigonometriche (secante, cosecante e cotangente) sono le funzioni reciproche di seno, coseno e tangente. I loro grafici sono riportati in Appendice C.

Funzioni esponenziali

Le funzioni esponenziali hanno la forma $f(x) = a^x$, dove la base a è una costante positiva. La Figura 20 mostra i grafici di $y = 2^x$ e $y = (0.5)^x$. In entrambi i casi il dominio è $(-\infty, +\infty)$ e l'immagine è $(0, +\infty)$.



(a) $y = 2^x$



(b) $y = (0.5)^x$

FIGURA 20

Le funzioni esponenziali saranno studiate in dettaglio nel Paragrafo 1.5 e si vedrà che esse sono usate per modellizzare molti fenomeni naturali, quali la crescita di una popolazione (se $a > 0$) o un decadimento radioattivo (se $a < 0$).

Funzioni logaritmiche

Le funzioni logaritmiche sono del tipo $f(x) = \log_a x$, dove la base a è una costante positiva. Esse sono le funzioni inverse delle funzioni esponenziali; verranno studiate nel Paragrafo 1.6. La Figura 21 sovrappone i grafici di quattro funzioni logaritmiche con basi diverse; in ogni caso il dominio è $(0, +\infty)$ e l'immagine $(-\infty, +\infty)$, e le funzioni crescono lentamente per $x > 1$.

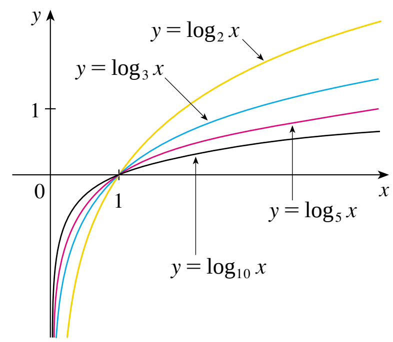


FIGURA 21

Funzioni trascendenti

Tutte le funzioni che non sono algebriche sono funzioni trascendenti; tra queste vi sono anche le trigonometriche e le loro inverse, le esponenziali, le logaritmiche, ma anche un gran numero di altre funzioni che non sono state nominate. Nel Capitolo 7 studieremo quelle funzioni trascendenti che si possono descrivere come somme di infiniti termini.

ESEMPIO 5 Classificare le funzioni seguenti.

(a) $f(x) = 5^x$ (b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ (d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUZIONE

(a) $f(x) = 5^x$ è un esponenziale (la x è a esponente).

(b) $g(x) = x^5$ è una potenza (la x è la base). Questa funzione è anche un polinomio di quinto grado.

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ è una funzione algebrica.

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ è un polinomio di grado 4.

1.2 Esercizi

1–2 ■ Classificare le funzioni seguenti, specificando se si tratta di potenze, radici, polinomi (di quale grado), funzioni razionali, algebriche, trigonometriche, esponenziali o logaritmiche.

1. (a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ (b) $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(c) $h(x) = x^9 + x^4$ (d) $r(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x}$

(e) $s(x) = \tan 2x$ (f) $t(x) = \log_{10} x$

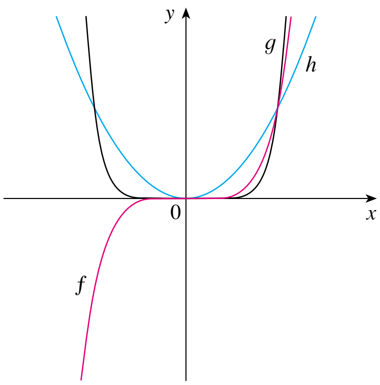
2. (a) $y = \dfrac{x - 6}{x + 6}$ (b) $y = x + \dfrac{x^2}{\sqrt{x - 1}}$

(c) $y = 10^x$ (d) $y = x^{10}$

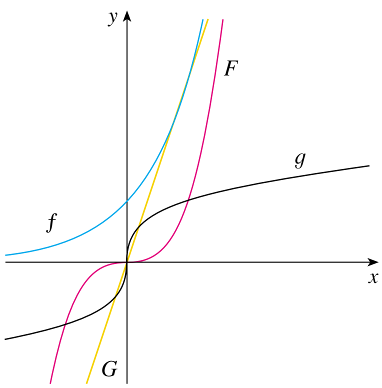
(e) $y = 2t^6 + t^4 - \pi$ (f) $y = \cos\theta + \sin\theta$

3–4 ■ Associare ogni equazione al suo grafico, motivando la scelta.

3. (a) $y = x^2$ (b) $y = x^5$ (c) $y = x^8$



4. (a) $y = 3x$ (b) $y = 3^x$
(c) $y = x^3$ (d) $y = \sqrt[3]{x}$



5. (a) Scrivere l'equazione della famiglia di rette con pendenza 2, e disegnarne alcuni rappresentanti.
(b) Trovare l'equazione della famiglia di funzioni lineari tali che $f(2) = 1$, e disegnarne alcuni rappresentanti.
(c) Quale funzione appartiene a entrambe le famiglie?

6. Il responsabile dell'affitto degli spazi in un mercato delle pulci sa per esperienza che al costo x riuscirà ad affittare $y = 200 - 4x$ posti.
(a) Disegnare il grafico di questa funzione lineare, ricordando che il costo degli spazi e il numero di posti affittati non possono essere negativi.
(b) Cosa rappresentano il coefficiente angolare, l'intercetta sull'asse x e sull'asse y di questa funzione?

7. La relazione che lega le scale di temperatura Fahrenheit (F) e Celsius (C) è la funzione lineare $F = \frac{9}{5}C + 32$.
(a) Disegnare il grafico di questa funzione.
(b) Qual è la pendenza di questo grafico, e cosa rappresenta? Qual è l'intercetta sull'asse F, e cosa rappresenta?

8. Marco parte da Milano alle 14:00 e viaggia a velocità costante. Arriva a Piacenza, a circa 70 kilometri da Milano, alle 14:50.
(a) Esprimere la distanza percorsa in funzione del tempo trascorso.
(b) Disegnare il grafico dell'equazione trovata nella parte (a).
(c) Qual è la pendenza della retta, e cosa rappresenta?

9. Alcuni biologi hanno notato che la frequenza del frinire dei grilli di una certa famiglia è legata alla temperatura ambientale, e la relazione che lega le due variabili appare essere quasi lineare. Un grillo produce 113 suoni al minuto a 70 °F e 173 a 80 °F.
(a) Trovare la relazione lineare tra la temperatura T e il numero di suoni N emessi dal grillo ogni minuto.
(b) Qual è la pendenza del grafico?
(c) Se i grilli emettono 150 suoni al minuto, stimare la temperatura.

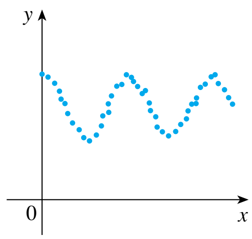
10. Un manager di un mobilificio sa che produrre 100 sedie in un giorno costa 2200 dollari, mentre produrne 300 costa 4800 dollari.
(a) Esprimere il costo in funzione del numero di sedie prodotte in un giorno, assumendo che la relazione tra le variabili sia lineare, quindi disegnarne il grafico.
(b) Qual è la pendenza del grafico, e cosa rappresenta?
(c) Qual è l'intercetta sull'asse y della funzione, e cosa rappresenta?

11. Sulla superficie dell'oceano, la pressione dell'acqua eguaglia la pressione atmosferica ed è pari a 15 lb/in^2 (libbre per pollice quadro). Sotto la superficie, la pressione dell'acqua cresce di 4.34 lb/in^2 ogni 10 ft (piedi) di profondità.
(a) Esprimere la pressione dell'acqua in funzione della profondità.
(b) Dove viene raggiunta la pressione di 100 lb/in^2 ?

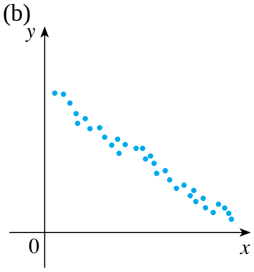
12. Il costo mensile per il noleggio di un'auto negli USA dipende dal chilometraggio percorso. Julia spende 380 dollari per aver percorso 480 miglia in maggio e 460 dollari per aver percorso 800 miglia in giugno.
(a) Esprimere il costo mensile C in funzione della distanza percorsa d, assumendo una dipendenza lineare.
(b) Usare il risultato della parte (a) per predire quanto costerà a Julia usare la macchina per 1500 miglia in un mese.
(c) Disegnare il grafico della funzione trovata in (a), precisando cosa rappresenta il coefficiente angolare.

13–14 ■ Per ciascun diagramma a punti, stabilire quale tipo di funzione si potrebbe adottare come modello per i dati, spiegando le scelte effettuate.

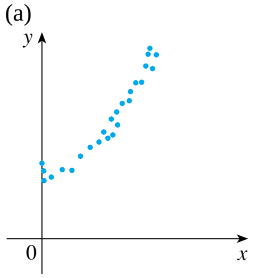
13. (a)



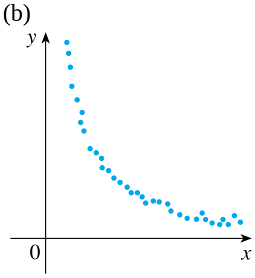
(b)



14. (a)



(b)



15. La tabella seguente riporta il tasso di ulcera peptica (in percentuale e riferito alla vita complessiva) di varie fasce reddituali, come da rapporto 1989 del National Health Interview Survey.

Reddito	Tasso di ulcera (percentuale)
\$ 4 000	14.1
\$ 6 000	13.0
\$ 8 000	13.4
\$ 12 000	12.5
\$ 16 000	12.0
\$ 20 000	12.4
\$ 30 000	10.5
\$ 45 000	9.4
\$ 60 000	8.2

(a) Disegnare un diagramma a punti dei dati e stabilire se un modello lineare sarebbe appropriato.
(b) Trovare e disegnare un modello lineare usando il primo e ultimo dato.
(c) Trovare e disegnare la retta di regressione lineare (metodo dei minimi quadrati).
(d) Usare il modello lineare trovato in (c) per stimare il tasso percentuale di ulcera relativo alla fascia di reddito di 25 000 dollari.
(e) In base al modello, che probabilità ha una persona con un reddito di 80 000 dollari di ammalarsi di questo tipo di ulcera?
(f) Sarebbe ragionevole applicare il modello a una persona con reddito di 200 000 dollari?

16. Alcuni biologi hanno notato che la frequenza del frinire dei grilli di una certa famiglia è legata alla temperatura ambientale. La tabella seguente mostra la frequenza del frinire per diversi valori di temperatura.

Temperatura (°F)	Frequenza del frinire (suoni/min)
50	20
55	46
60	79
65	91
70	113
75	140
80	173
85	198
90	211

(a) Disegnare un diagramma a punti dei dati e stabilire se un modello lineare sarebbe appropriato.
(b) Trovare e disegnare un modello lineare usando il primo e ultimo dato.
(c) Trovare e disegnare la retta di regressione lineare (metodo dei minimi quadrati).

17. La tabella seguente riporta la misura (in piedi) del salto vincente alle Olimpiadi del secolo scorso nella specialità del salto con l'asta.

Anno	Altezza (ft)	Anno	Altezza (ft)
1900	10.83	1956	14.96
1904	11.48	1960	15.42
1908	12.17	1964	16.73
1912	12.96	1968	17.71
1920	13.42	1972	18.04
1924	12.96	1976	18.04
1928	13.77	1980	18.96
1932	14.15	1984	18.85
1936	14.27	1988	19.77
1948	14.10	1992	19.02
1952	14.92	1996	19.42

(a) Riportare in un grafico i dati e decidere se un modello lineare è appropriato per interpretarli.
(b) Disegnare il grafico e la retta di regressione.
(c) Usare il modello per stimare l'altezza saltata dal vincitore nelle Olimpiadi di Sydney del 2000, e confrontare la previsione con il risultato reale.
(d) Si ritiene ragionevole usare il modello per prevedere l'altezza saltata da un atleta nel 2100?

18. Secondo uno studio del 1972 del Ministero della Scienza e della Tecnologia americano, il costo per ridurre le emissioni di un'automobile in una certa percentuale è il seguente:

Riduzione delle emissioni (%)	Costo per auto (in \$)	Riduzione delle emissioni (%)	Costo per auto (in \$)
50	45	75	90
55	55	80	100
60	62	85	200
65	70	90	375
70	80	95	600

Trovare un modello che "catturi" l'andamento di questi dati.

19. Usare i dati riportati in tabella per modellizzare la popolazione del mondo nel ventesimo secolo con una funzione cubica. Quindi utilizzare il modello per stimare la popolazione nel 1925.

Anno	Popolazione (milioni)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6070

20. La tabella seguente fornisce la distanza media d dei pianeti dal Sole (prendendo come unità di misura la distanza della Terra dal Sole) e il loro periodo di rivoluzione T, in anni.

Pianeta	d	T
Mercurio	0.387	0.241
Venere	0.723	0.615
Terra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Giove	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Nettuno	30.086	164.784
Plutone	39.507	248.350

(a) Utilizzare una funzione potenza per interpretare i dati.

(b) Secondo la terza legge di Keplero, “il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo della sua distanza media dalla Terra”. Il modello conferma la terza legge di Keplero?

1.3 Nuove funzioni dalle precedenti

In questo paragrafo presentiamo alcune facili tecniche per ottenere, partendo dalle funzioni elementari illustrate nel Paragrafo 1.2, grafici più elaborati ottenuti per traslazioni, riflessioni, dilatazioni, oppure combinando i grafici di due funzioni con le tipiche operazioni aritmetiche, o ancora componendo i grafici di più funzioni.

Trasformazioni di funzioni

Applicando certe trasformazioni al grafico di una funzione possiamo ottenere i grafici di funzioni che a questa sono legate, riducendo così la mole di lavoro relativa allo studio grafico. Consideriamo per prima una **traslazione**. Se c è un numero positivo, allora il grafico di $y = f(x) + c$ è lo stesso di $y = f(x)$, spostato in su di c unità (poiché ogni coordinata y è aumentata del medesimo valore c). Parimenti, se $g(x) = f(x - c)$, dove $c > 0$, allora il valore di g in x è uguale al valore di f in $x - c$ (c unità a sinistra di x). Dunque, il grafico di $y = f(x - c)$ è il grafico di $y = f(x)$ traslato di c unità verso destra (Figura 1).

Traslazioni orizzontali e verticali Supposto $c > 0$, per ottenere il grafico di

$y = f(x) + c$, traslare il grafico di $y = f(x)$ c unità verso l'alto

$y = f(x) - c$, traslare il grafico di $y = f(x)$ c unità verso il basso

$y = f(x - c)$, traslare il grafico di $y = f(x)$ c unità verso destra

$y = f(x + c)$, traslare il grafico di $y = f(x)$ c unità verso sinistra

Consideriamo ora le trasformazioni per **dilatazione** e **riflessione**. Se $c > 1$, allora il grafico di $y = cf(x)$ è il grafico di $y = f(x)$ dilatato di un fattore c in direzione verticale (perché ogni coordinata y è moltiplicata per uno stesso coefficiente c).

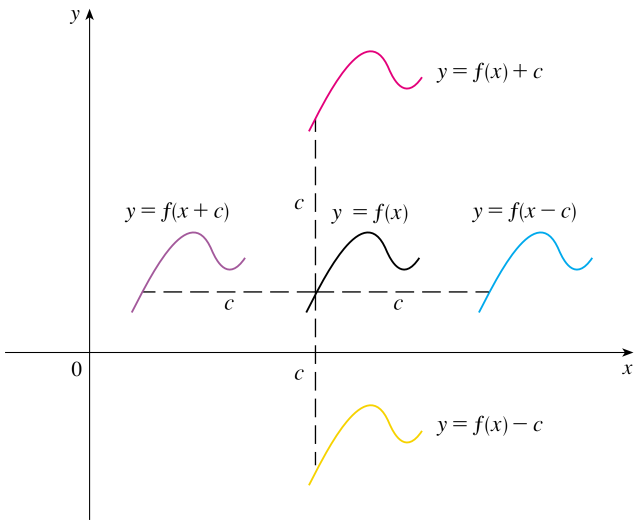


FIGURA 1
Traslazione del grafico di f

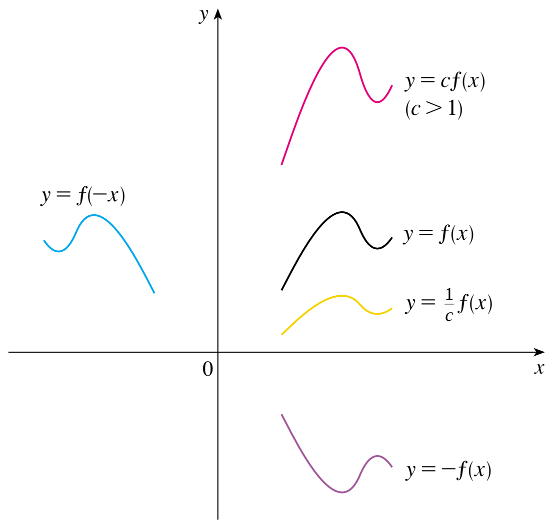


FIGURA 2
Dilatazione e riflessione del grafico di f

Il grafico di $y = -f(x)$ è il grafico di $y = f(x)$ riflesso rispetto all'asse x perché il punto (x, y) è trasformato nel punto $(x, -y)$. (Si veda la Figura 2 e la seguente classificazione, dove compaiono anche altri casi di trasformazioni per dilatazione, contrazione e riflessione.)

Dilatazioni e riflessioni orizzontali e verticali Supposto $c > 1$, per ottenere il grafico di
- $y = cf(x)$, dilatare il grafico di $y = f(x)$ verticalmente di un fattore c
- $y = (1/c)f(x)$, contrarre il grafico di $y = f(x)$ verticalmente di un fattore c
- $y = f(cx)$, dilatare il grafico di $y = f(x)$ orizzontalmente di un fattore c
- $y = f(x/c)$, contrarre il grafico di $y = f(x)$ orizzontalmente di un fattore c
- $y = -f(x)$, riflettere il grafico di $y = f(x)$ rispetto all'asse x
- $y = f(-x)$, riflettere il grafico di $y = f(x)$ rispetto all'asse y

La Figura 3 illustra queste dilatazioni applicate al coseno quando $c = 2$. Per esempio, per ottenere il grafico di $y = 2 \cos x$ si moltiplica per 2 la coordinata y di ciascun punto del grafico di $y = \cos x$, il che significa dilatare tale grafico verticalmente di un fattore 2.

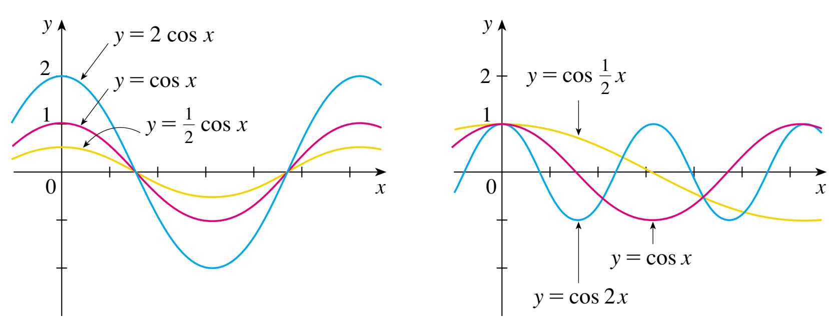
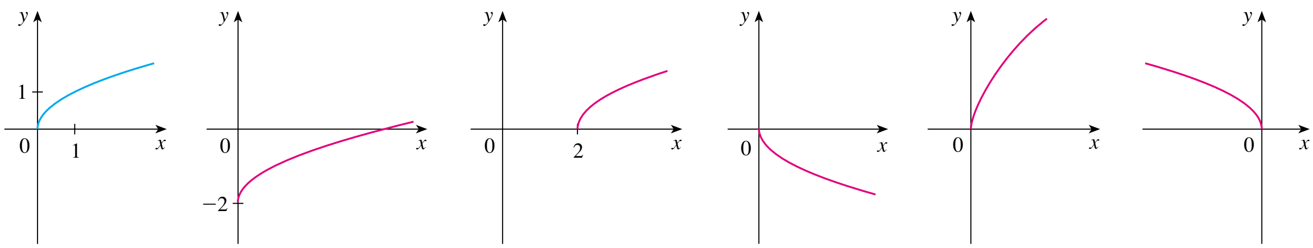


FIGURA 3

ESEMPIO 1 Dal grafico di $y = \sqrt{x}$, dedurre con il metodo delle trasformazioni il grafico di $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ e $y = \sqrt{-x}$.

SOLUZIONE Il grafico della radice quadrata $y = \sqrt{x}$, ottenuto dalla Figura 13, Paragrafo 1.2, è riportato nella Figura 4(a). Nelle altre parti della figura sono stati disegnati $y = \sqrt{x} - 2$ per traslazione di due unità verso il basso, $y = \sqrt{x - 2}$, traslando di due unità verso destra, $y = -\sqrt{x}$ per riflessione rispetto all'asse x, $y = 2\sqrt{x}$ per dilatazione verticale di un fattore 2 e $y = \sqrt{-x}$ per riflessione rispetto all'asse y.



(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x} - 2$ (c) $y = \sqrt{x - 2}$ (d) $y = -\sqrt{x}$ (e) $y = 2\sqrt{x}$ (f) $y = \sqrt{-x}$

FIGURA 4

ESEMPIO 2 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUZIONE Completando il quadrato, riscriviamo l'equazione come

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Otteniamo perciò il grafico voluto a partire dalla parabola $y = x^2$ e traslandola di 3 unità verso sinistra e quindi di 1 unità verso l'alto (Figura 5).

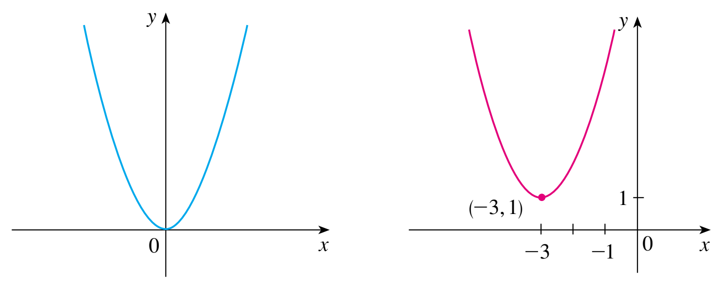


FIGURA 5 (a) $y = x^2$ (b) $y = (x + 3)^2 + 1$

ESEMPIO 3 Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:
(a) $y = \sin 2x$ (b) $y = 1 - \sin x$

SOLUZIONE
(a) Otteniamo il grafico di $y = \sin 2x$ dal grafico di $y = \sin x$ per compressione orizzontale di un fattore 2 (Figure 6 e 7).

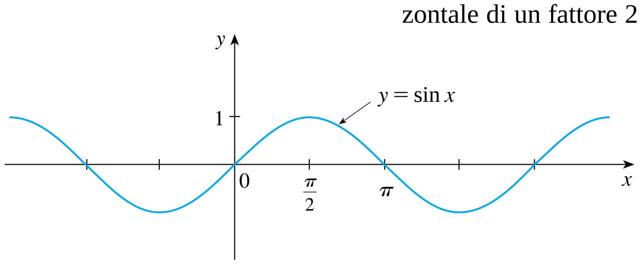


FIGURA 6

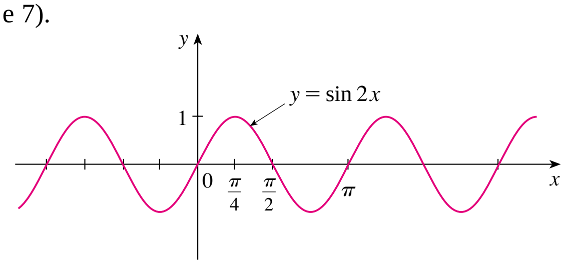


FIGURA 7

(b) Per ottenere il grafico di $y = 1 - \sin x$, partiamo ancora da $y = \sin x$. Per riflessione attorno all'asse x si ottiene il grafico di $y = -\sin x$, quindi per traslazione verso l'alto di una unità si ottiene il grafico di $y = 1 - \sin x$ (Figura 8).

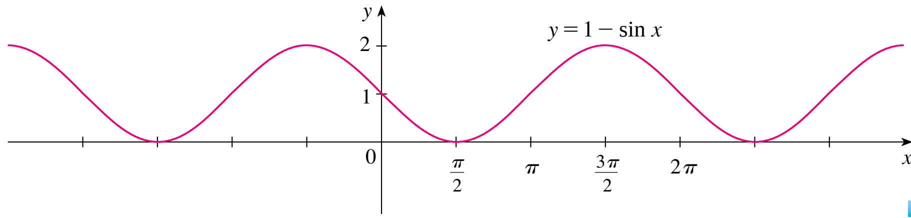


FIGURA 8

ESEMPIO 4 La Figura 9 mostra il grafico delle ore di luce in funzione del periodo dell'anno a diverse latitudini. Si trovi una funzione che modellizza la lunghezza delle giornate a Philadelphia, che si trova circa a 40° N (Milano è a circa 45° N).

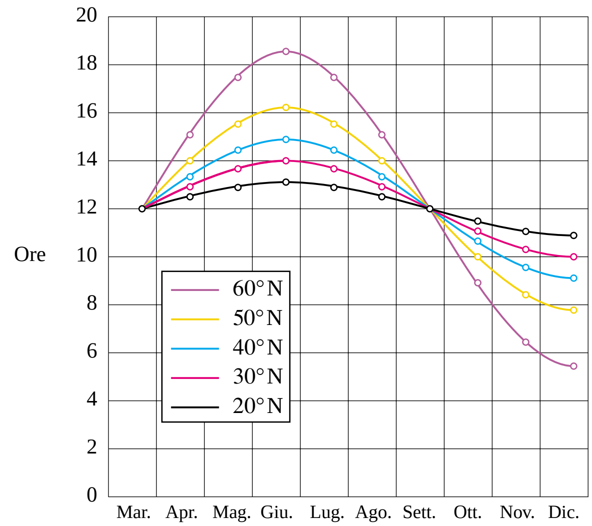


FIGURA 9
Durata del giorno a diverse latitudini, dal 21 marzo al 21 dicembre

Fonte: Lucia C. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (New York: Silver, Burdett, 1935) p. 40.

SOLUZIONE Ogni curva sembra una funzione trigonometrica opportunamente dilatata e traslata. Alla latitudine di Philadelphia il giorno dura circa 14.8 ore verso metà giugno (diciamo il 21) e 9.2 ore il 21 dicembre. L'ampiezza di questa oscillazione è pari a $\frac{1}{2}(14.8 - 9.2) = 2.8$ e costituisce il fattore di dilatazione verticale della funzione seno.

Per quale fattore è necessario dilatare orizzontalmente il seno se misuriamo il tempo t in giorni? Poiché ci sono 365 giorni in un anno, il periodo del nostro modello deve essere di 365, e se il periodo della funzione $y = \sin t$ è 2π, la dilatazione orizzontale deve di conseguenza essere pari a $c = 2\pi/365$.

La curva comincia il suo ciclo il 21 marzo, che è l'ottantesimo giorno dell'anno, quindi è necessario traslare la curva di 80 unità verso destra, oltre che di 12 unità verso l'alto. Possiamo allora modellizzare la lunghezza del giorno in una città al 40° parallelo con la funzione

$$L(t) = 12 + 2.8 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Un'altra trasformazione piuttosto interessante è il valore assoluto di una funzione. Se $y = |f(x)|$, allora, secondo la definizione di valore assoluto, $y = f(x)$ se $f(x) \geq 0$

e $y = -f(x)$ se $f(x) < 0$. Questa osservazione ci suggerisce come ottenere il grafico di $y = |f(x)|$ a partire da quello di $y = f(x)$: la parte del grafico che giace al di sopra dell'asse x rimane immutata; la parte sotto l'asse x viene riflessa rispetto all'asse x.

ESEMPIO 5 Disegnare il grafico della funzione $y = |x^2 - 1|$.

SOLUZIONE Per prima cosa disegniamo il grafico della parabola $y = x^2 - 1$ traslando verso il basso di una unità $y = x^2$ [Figura 10(a)]. Il grafico è sotto l'asse x se $-1 < x < 1$, perciò riflettiamo rispetto all'asse x questa parte di parabola per ottenere il grafico di $y = |x^2 - 1|$ [Figura 10(b)].

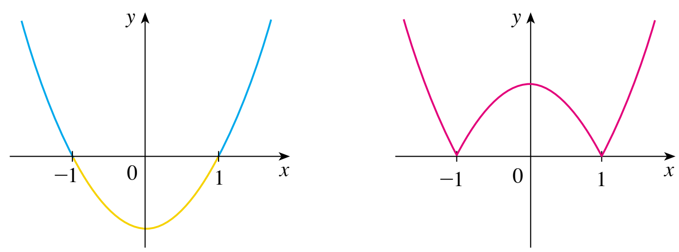


FIGURA 10 (a) $y = x^2 - 1$ (b) $y = |x^2 - 1|$

Combinazioni di funzioni

Due funzioni f e g possono essere combinate per formare una nuova funzione $f + g$, $f - g$, fg, f/g in modo simile a quello con il quale siamo abituati a sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere numeri reali.

Se definiamo la somma $f + g$ con l'espressione

1 $$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

allora il secondo membro dell'Equazione 1 ha senso solo se sia $f(x)$ sia $g(x)$ sono definite, cioè se x appartiene sia al dominio di f sia a quello di g. Se il dominio di f è A e il dominio di g è B, allora il dominio di $f + g$ è l'intersezione di questi domini, ossia $A \cap B$.

Si osservi che il segno + nel primo membro dell'Equazione 1 rappresenta l'operazione di addizione di *funzioni*, mentre il segno + nel secondo membro rappresenta l'operazione di somma per i *numeri* $f(x)$ e $g(x)$.

Analogamente, è possibile definire la differenza $f - g$ e il prodotto fg, e i loro domini sono, pure, $A \cap B$. Ma nel definire il quoziente f/g bisogna ricordare di non dividere per 0.

Algebra delle funzioni Siano f e g due funzioni di dominio A e B. Allora le funzioni $f + g$, $f - g$, fg e f/g sono definite come segue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{dominio} = A \cap B$$

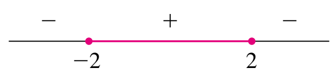
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{dominio} = A \cap B$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{dominio} = A \cap B$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{dominio} = \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$$

ESEMPIO 6 Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, trovare le funzioni $f + g$, $f + g$, fg e f/g.

▲ Un altro modo di risolvere $4 - x^2 \geqslant 0$: è il seguente: $(2 - x)(2 + x) \geqslant 0$



SOLUZIONE Il dominio di $f(x) = \sqrt{x}$ è $[0, +\infty)$. Il dominio di $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ consiste in tutti i numeri x tali che $4 - x^2 \geq 0$, ossia $x^2 \leq 4$. Mediante estrazione di radice quadrata di entrambi i membri, si ottiene $|x| \leqslant 2$, ossia $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Perciò il dominio di g è l'intervallo $[-2, +2]$. L'intersezione dei domini di f e g è

$$[0, +\infty) \cap [-2, 2] = [0, 2]$$

Perciò, secondo le definizioni, abbiamo

$$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$(fg)(x) = \sqrt{x}\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4x - x^3} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4 - x^2}} = \sqrt{\frac{x}{4 - x^2}} \qquad 0 \leqslant x < 2$$

Osserviamo che il dominio di f/g è l'intervallo $[0, 2)$ perché è necessario escludere i punti dove $g(x) = 0$ cioè $x = \pm 2$. ■

Il grafico della funzione $f + g$ si ottiene dal grafico di f e da quello di g per **addizione grafica**. Ciò significa che si sommano le corrispondenti coordinate y, come in Figura 11. La Figura 12 mostra il risultato di questa procedura applicato al grafico della funzione $f + g$ dell'Esempio 6.

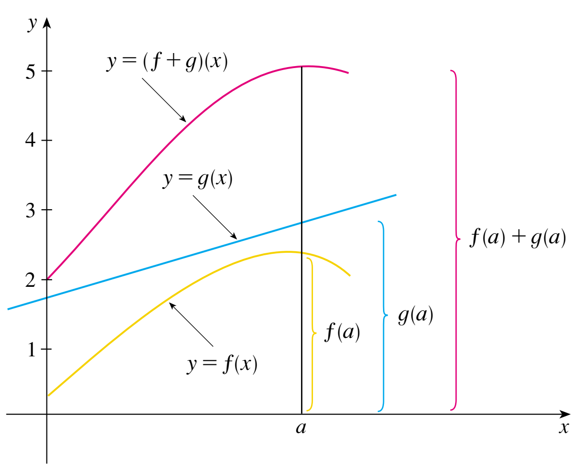


FIGURA 11

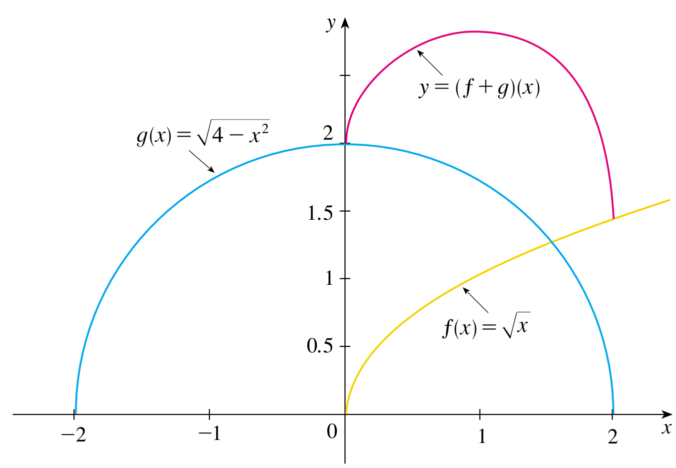


FIGURA 12

Composizione di funzioni

Esiste un altro modo di combinare due funzioni per ottenerne una nuova. Per esempio, si consideri $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$. Poiché y è una funzione di u e u è, a sua volta, una funzione di x, segue che, in definitiva, y è una funzione di x. Per sostituzione si ottiene:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Questo procedimento è detto *composizione* perché la nuova funzione è *composta* da f e da g.

In generale, date due funzioni f e g, si fissa un punto x nel dominio di g e si considera la sua immagine $g(x)$; se il numero $g(x)$ è nel dominio di f, allora è possibile calcolare il valore $f(g(x))$. Il risultato è una nuova funzione $h(x) = f(g(x))$ ottenuta sostituendo g in f, detta *composizione* (o *composta*) di f e g e denotata da $f \circ g$.

Definizione Date due funzioni f e g, la funzione **composta** $f \circ g$ (anche detta **composizione** di f e g) è definita da

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Il dominio di $f \circ g$ è l'insieme di tutte le x appartenenti al dominio di g tali che $g(x)$ è nel dominio di f. In altre parole, $(f \circ g)(x)$ è definita se $g(x)$ e $f(g(x))$ sono entrambe definite. Il modo migliore per rappresentare questa situazione è tramite un diagramma ingresso-uscita (Figura 13) o con un diagramma a frecce (Figura 14).

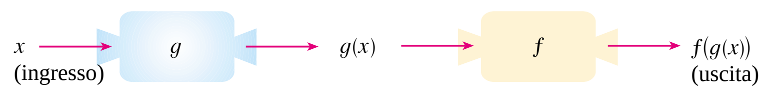


FIGURA 13
Un dispositivo che compone $f \circ g$ è costituito dalla successione di un dispositivo per g e di uno per f

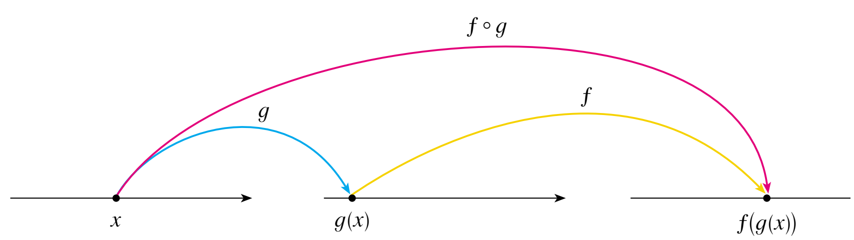


FIGURA 14
Diagramma a frecce di $f \circ g$

ESEMPIO 7 Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 3$, trovare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

SOLUZIONE Abbiamo

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

NOTA • Si può vedere dall'Esempio 7 che, in generale, $f \circ g \neq g \circ f$. Si ricordi: la notazione $f \circ g$ significa che g viene applicata per prima, e in seguito viene applicata f. Nell'Esempio 7, $f \circ g$ è la funzione che *prima* sottrae 3 e *poi* eleva al quadrato; $g \circ f$ è la funzione che *prima* eleva al quadrato e *poi* sottrae 3.

ESEMPIO 8 Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2 - x}$, trovare ciascuna funzione con il relativo dominio.

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

SOLUZIONE

(a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

Il dominio di $f \circ g$ è $\{x \mid 2 - x \geqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant 2\} = (-\infty, 2]$.

(b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Perché $\sqrt{x}$ sia definita occorre avere $x \geqslant 0$. Perché sia definita $\sqrt{2-\sqrt{x}}$ deve essere $2 - \sqrt{x} \geqslant 0$, ossia $\sqrt{x} \leqslant 2$ o $x \leqslant 4$. Quindi avendo $0 \leq x \leq 4$, il dominio di $g \circ f$ è l'intervallo chiuso $[0, 4]$.

Se $0 \leqslant a \leqslant b$, allora $a^2 \leqslant b^2$

(c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

Il dominio di $f \circ f$ è $[0, +\infty)$.

(d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\sqrt{2-x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{2-x}}$$

Questa espressione è definita per $2 - x \geqslant 0$, ossia $x \leqslant 2$, e $2 - \sqrt{2-x} \geqslant 0$. Quest'ultima disequazione è equivalente a $\sqrt{2-x} \leqslant 2$, o $2 - x \leqslant 4$, ossia $x \geqslant -2$. Pertanto $-2 \leqslant x \leqslant 2$, e il dominio di $g \circ g$ è l'intervallo chiuso $[-2, 2]$. ■

Si supponga di non avere l'espressione esplicita di f e di g, ma di disporre invece di una tabella di alcuni loro valori e del loro grafico. Si può anche in questo caso disegnare il grafico della funzione composta, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 9 La Figura 15 illustra i grafici di f e di g. Sia $h = f \circ g$. Stimare il valore di $h(0.5)$ e disegnare il grafico di h.

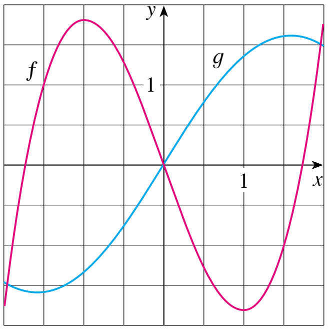


FIGURA 15

▲ Un metodo geometrico per disegnare le funzioni composte viene spiegato nell'Esercizio 59.

SOLUZIONE Dal grafico di g possiamo stimare che $g(0.5) \approx 0.8$. Dal grafico di f si ricava che $f(0.8) \approx -1.7$. Perciò

$$h(0.5) = f(g(0.5)) \approx f(0.8) \approx -1.7$$

In modo simile possiamo stimare altri valori di h, riassunti nella seguente tabella.

x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$g(x)$	-1.5	-1.6	-1.3	-0.8	0.0	0.8	1.3	1.6	1.5
$h(x) = f(g(x))$	1.0	0.7	1.5	1.7	0.0	-1.7	-1.5	-0.7	-1.0

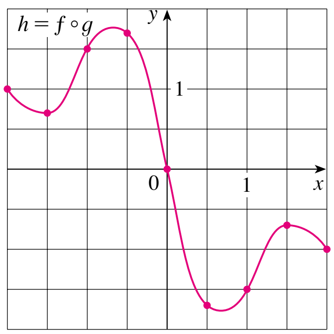


FIGURA 16

Usiamo questi valori per disegnare il grafico della funzione composta h in Figura 16. Se desiderassimo un grafico più accurato, potremmo applicare la medesima procedura a un numero maggiore di valori di x. ■

È possibile fare la composizione anche di tre o più funzioni. La funzione composta $f \circ g \circ h$ si ottiene applicando prima h, poi g e quindi f, come segue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

ESEMPIO 10 Trovare $f \circ g \circ h$ con $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = x + 3$.

SOLUZIONE
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 3)) \\ &= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}\end{aligned}$$

Fin qui abbiamo usato la composizione di funzioni per costruire funzioni complicate da altre più semplici. Sovente, però, è importante essere in grado anche di decomporre funzioni complicate, come nel prossimo esempio.

ESEMPIO 11 Data la funzione $F(x) = \cos^2(x + 9)$, trovare delle funzioni f, g, e h tali che $F = f \circ g \circ h$.

SOLUZIONE Poiché $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, la formula impone che per prima cosa si aggiunga 9, poi si prenda il coseno del risultato, quindi si elevi al quadrato. Perciò poniamo

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

Dunque

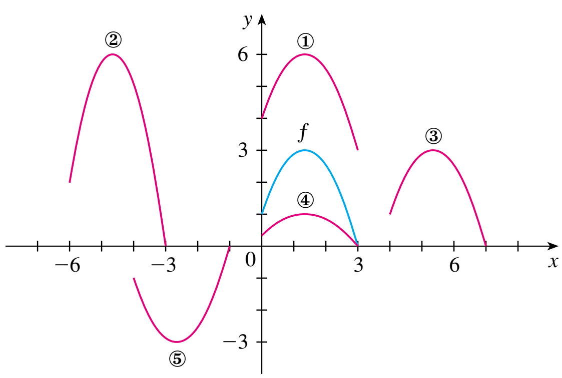
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9)) \\ &= [\cos(x + 9)]^2 = F(x)\end{aligned}$$

1.3 Esercizi

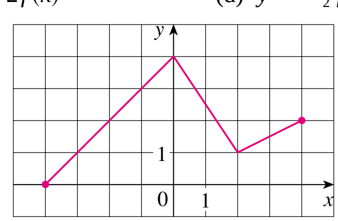
1. Si supponga dato il grafico di $f(x)$. Scrivere l'equazione della funzione ottenuta da f, operando una:
(a) traslazione verso l'alto di tre unità
(b) traslazione verso il basso di tre unità
(c) traslazione verso destra di tre unità
(d) traslazione verso sinistra di tre unità
(e) riflessione rispetto all'asse x
(f) riflessione rispetto all'asse y
(g) dilatazione verticale di un fattore 3
(h) contrazione verticale di un fattore 3

2. Spiegare come ciascuno dei seguenti grafici può essere ottenuto da quello di $y = f(x)$.
(a) $y = 5f(x)$ (b) $y = f(x - 5)$
(c) $y = -f(x)$ (d) $y = -5f(x)$
(e) $y = f(5x)$
(f) $y = 5f(x) - 3$

3. Assegnato il grafico di $y = f(x)$, associare ogni equazione con il suo grafico, spiegando perché.
(a) $y = f(x - 4)$
(b) $y = f(x) + 3$
(c) $y = \frac{1}{3}f(x)$
(d) $y = -f(x + 4)$
(e) $y = 2f(x + 6)$



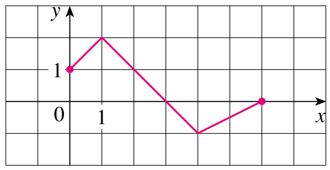
4. È dato il grafico di f; utilizzarlo per disegnare il grafico delle funzioni:
(a) $y = f(x + 4)$ (b) $y = f(x) + 4$
(c) $y = 2f(x)$ (d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 3$



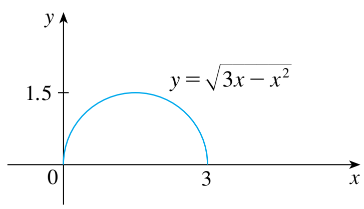
5. È dato il grafico di f; utilizzarlo per disegnare il grafico delle funzioni:

(a) $y = f(2x)$ (b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

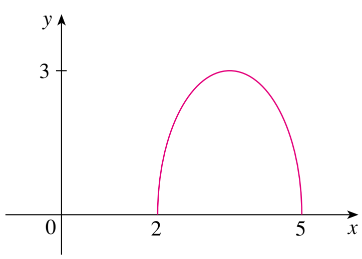
(c) $y = f(-x)$ (d) $y = -f(-x)$



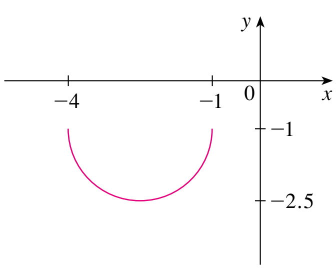
6–7 ■ È dato il grafico di $y = \sqrt{3x - x^2}$; usare le trasformazioni per creare una funzione che abbia il grafico seguente.



6.



7.



8. (a) Com'è legato il grafico di $y = 2 \sin x$ a quello di $y = \sin x$? Usando la risposta data e la Figura 6(a), disegnare il grafico di $y = 2 \sin x$.

(b) Com'è legato il grafico di $y = 1 + \sqrt{x}$ a quello di $y = \sqrt{x}$? Usando la risposta data e la Figura 4(a), disegnare il grafico di $y = 1 + \sqrt{x}$.

9–24 ■ Disegnare il grafico di ciascuna funzione, senza effettuare uno studio puntuale, ma procedendo a partire dal grafico di una delle funzioni elementari presentate nel Paragrafo 1.2, quindi applicando la trasformazione più appropriata.

9. $y = -1/x$

10. $y = 2 - \cos x$

11. $y = \tan 2x$

12. $y = \sqrt[3]{x + 2}$

13. $y = \cos(x/2)$

14. $y = x^2 + 2x + 3$

15. $y = \dfrac{1}{x - 3}$

16. $y = -2 \sin \pi x$

17. $y = \dfrac{1}{3} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

18. $y = 2 + \dfrac{1}{x + 1}$

19. $y = 1 + 2x - x^2$

20. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - 3$

21. $y = 2 - \sqrt{x + 1}$

22. $y = (x - 1)^3 + 2$

23. $y = |\sin x|$

24. $y = |x^2 - 2x|$

25. New Orleans è situata a una latitudine di 30° N. Utilizzare la Figura 9 per trovare una funzione che modellizzi il numero di ore di luce diurna in questa città come funzione del tempo nel corso di un anno. Usare il fatto che al 31 marzo il Sole sorge alle 5:51 e tramonta alle 18:18 per verifcare la bontà del modello.

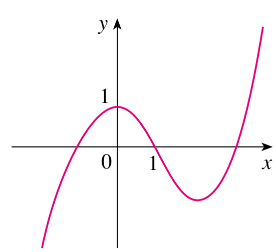
26. Una stella pulsante è una stella la cui luminosità varia nel tempo. Per Delta Cephei, la più nota tra queste, il periodo di pulsazione è di 5.4 giorni, e la sua brillantezza media (la magnitudine) è di 4.0. La brillantezza oscilla di ±0.35. Trovare una funzione che esprime la brillantezza di Delta Cephei in funzione del tempo.

27. (a) Come è legato il grafico di $y = f(|x|)$ a quello di f?

(b) Disegnare il grafico di $y = \sin |x|$.

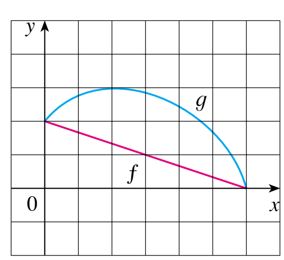
(c) Disegnare il grafico di $y = \sqrt{|x|}$.

28. Usare il grafico di f per disegnare il grafico di $y = 1/f(x)$. Quali sono gli aspetti più importanti da rilevare nel disegnare il grafico di $y = 1/f(x)$? Spiegare come utilizzarli.

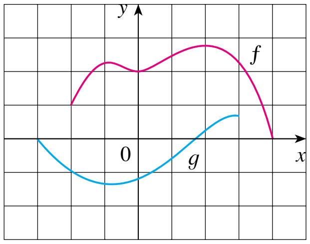


29–30 ■ Usare l'addizione grafica per disegnare il grafico di $f + g$.

29.



30.



31–32 ■ Trovare $f + g$, $f - g$, fg e f/g e i loro dominii.

31. $f(x) = x^3 + 2x^2, \quad g(x) = 3x^2 - 1$

32. $f(x) = \sqrt{1 + x}, \quad g(x) = \sqrt{1 - x}$

33–34 ■ Usare il grafico di f e di g e il metodo di addizione grafica per disegnare il grafico di $f + g$.

33. $f(x) = x, \quad g(x) = 1/x$

34. $f(x) = x^3, \quad g(x) = -x^2$

35–38 ■ Trovare le funzioni $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$ precisando il loro dominio.

35. $f(x) = \sin x, \quad g(x) = 1 - \sqrt{x}$

36. $f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = 5x^2 + 3x + 2$

37. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

38. $f(x) = \sqrt{2x + 3}, \quad g(x) = x^2 + 1$

39–40 ■ Trovare $f \circ g \circ h$.

39. $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad g(x) = x^2 + 2, \quad h(x) = x + 3$

40. $f(x) = \dfrac{2}{x + 1}, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = \sqrt{x + 3}$

41–44 ■ Esprimere la funzione come $f \circ g$.

41. $F(x) = (x^2 + 1)^{10}$

42. $F(x) = \sin(\sqrt{x})$

43. $u(t) = \sqrt{\cos t}$

44. $u(t) = \dfrac{\tan t}{1 + \tan t}$

45–47 ■ Esprimere la funzione come $f \circ g \circ h$.

45. $H(x) = 1 - 3^{x^2}$

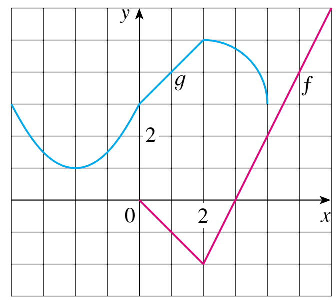
46. $H(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$

47. $H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$

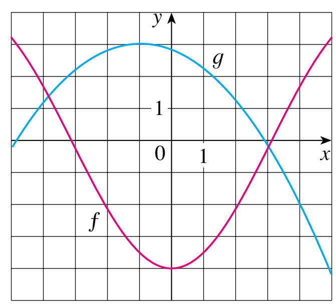
48. Usare la tabella seguente per valutare le espressioni.
(a) $f(g(1))$ (b) $g(f(1))$ (c) $f(f(1))$
(d) $g(g(1))$ (e) $(g \circ f)(3)$ (f) $(f \circ g)(6)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

49. Usando i grafici assegnati di f e g, valutare ognuna delle seguenti espressioni e nel caso spiegare perché non è definita.
(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(0))$ (c) $(f \circ g)(0)$
(d) $(g \circ f)(6)$ (e) $(g \circ g)(-2)$ (f) $(f \circ f)(4)$



50. Usando i grafici assegnati di f e g, stimare il valore di $f(g(x))$ per $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Usare queste stime per disegnare uno schizzo di $f \circ g$.



51. Una pietra viene lanciata in un lago, creando un'onda che si espande con la velocità di 60 cm/s.
(a) Esprimere il raggio r del cerchio in funzione del tempo t (in secondi).
(b) Se A è l'area del cerchio in funzione del raggio, trovare $A \circ r$ e darne una interpretazione.

52. Un aeroplano vola a un'altezza di 1 km a una velocità di 350 km/s, e passa nel quadro di un radar nell'istante $t = 0$.
(a) Esprimere la distanza orizzontale d percorsa dall'aereo come funzione di t.
(b) Esprimere la distanza s tra l'aereo e la stazione radar come funzione di d.
(c) Utilizzare le regole per la composizione delle funzioni per esprimere s in funzione di t.

53. La **funzione di Heaviside** H è definita da

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$