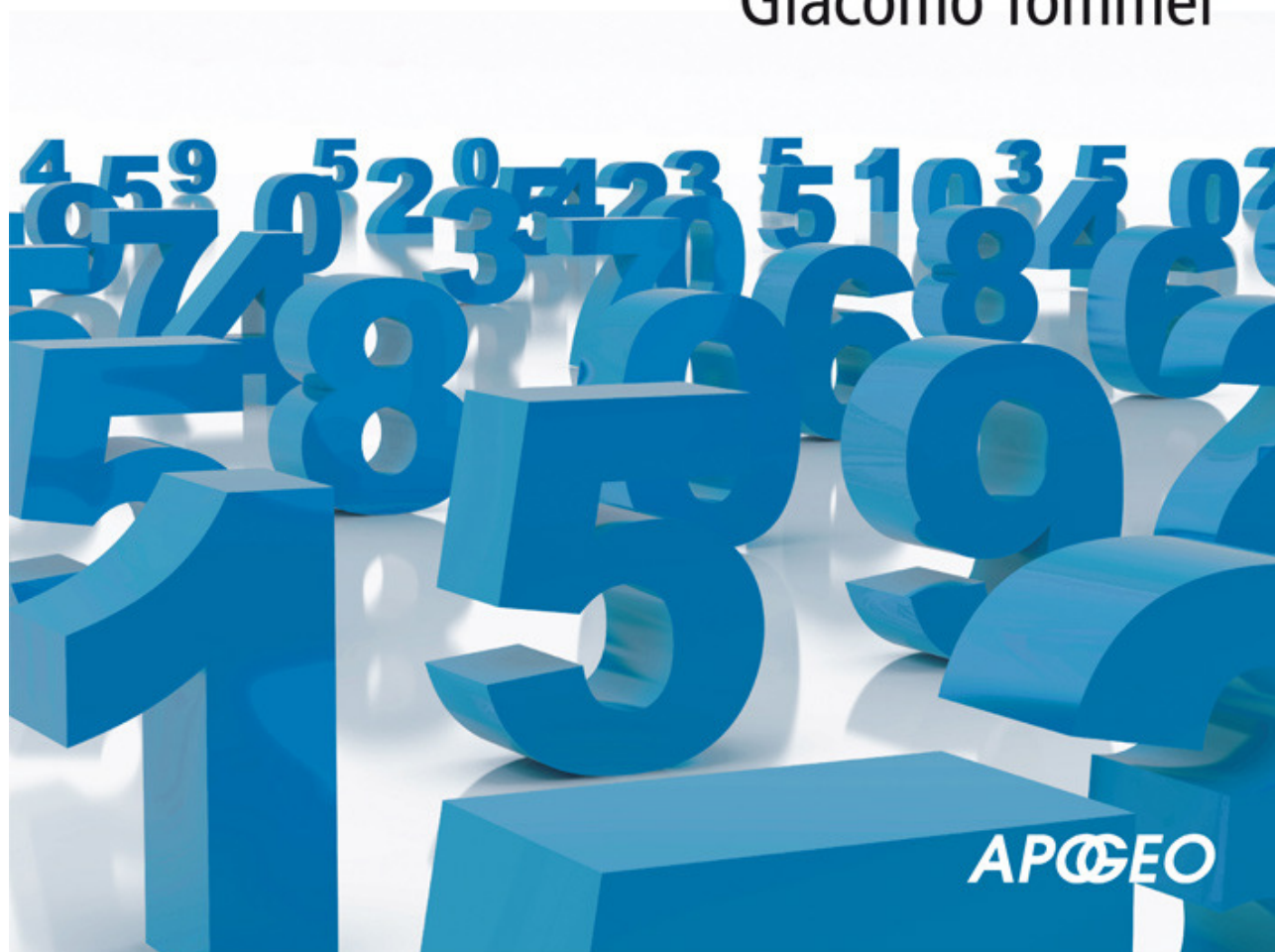


Matematica di base

Giacomo Tommei



Indice

Prefazione	iii
Capitolo 1	
<i>Aritmetica e algebra elementare</i>	1
1.1 Soluzioni degli esercizi proposti	1
Capitolo 2	
<i>Geometria elementare</i>	5
2.1 Soluzioni degli esercizi proposti	5
Capitolo 3	
<i>Insiemi e funzioni</i>	13
3.1 Soluzioni degli esercizi proposti	13
Capitolo 4	
<i>Funzioni lineari</i>	17
4.1 Soluzioni degli esercizi proposti	17
Capitolo 5	
<i>Funzioni quadratiche</i>	21
5.1 Soluzioni degli esercizi proposti	21
Capitolo 6	
<i>Equazioni e disequazioni</i>	25
6.1 Soluzioni degli esercizi proposti	25
Capitolo 7	
<i>Coniche</i>	29
7.1 Soluzioni degli esercizi proposti	29
Capitolo 8	
<i>Funzioni esponenziali e logaritmiche</i>	31
8.1 Soluzioni degli esercizi proposti	31
Capitolo 9	
<i>Funzioni goniometriche</i>	33
9.1 Soluzioni degli esercizi proposti	33
Capitolo 10	
<i>Calcolo combinatorio e probabilità</i>	35
10.1 Soluzioni degli esercizi proposti	35
Capitolo 11	
<i>Mettiti alla prova</i>	37
11.1 Soluzioni batteria 1	37
11.2 Soluzioni batteria 2	38
11.3 Soluzioni batteria 3	38
11.4 Soluzioni batteria 4	39
11.5 Soluzioni batteria 5	40

Prefazione

In questo file troverai le soluzioni degli esercizi proposti alla fine di ciascun capitolo del libro “Matematica di base”. Alcuni degli esercizi, quelli più interessanti, sono commentati in dettaglio, mentre degli altri viene fornita esclusivamente la soluzione.

Nel caso tu riscontrassi delle inesattezze o degli errori segnalali scrivendomi alla seguente casella e-mail:

`tommei@dm.unipi.it`

Giacomo Tommei

1 Aritmetica e algebra elementare

1.1 Soluzioni degli esercizi proposti

1.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} > \sqrt{5} > 1 > \frac{2}{7} > (-2)^{-3} > -0.25 > -\frac{7}{6}$$

2.

$$(0.2)^3 < (0.3)^2 < 2^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$

3.

$$-\frac{1}{5} < -\frac{4}{25} < 2^{-3} < 0.72 < \sqrt{3} < 2 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

4. Si ha $N = 27195^8 - (10887^8 - 10152^8)$. Il numero 27195 può essere fattorizzato come $3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 37$; inoltre l'espressione tra parentesi è divisibile per $10887 - 10152 = 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ (ricorda che $a^n - b^n$ è sempre divisibile per $a - b$), quindi N è divisibile per $3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Adesso scriviamo N come $(27195^8 - 10887^8) + 10152^8$. L'espressione in parentesi è divisibile per $27195 - 10887 = 16308 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 151$ e $10152 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 47$, quindi N è multiplo di $2^2 \cdot 3^3$. In conclusione N è un multiplo di $3 \cdot 5 \cdot 7^2$ e di $2^2 \cdot 3^3$, cioè un multiplo di $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 26460$.

5. Il numero $5n + 2$ termina con 2 o 7 per ogni $n \in \mathbb{N}$, mentre i quadrati dei numeri naturali terminano solo con 0, 1, 4, 5, 6, 9.

6. 841

7. 180000: il calcolo proposto equivale a sommare 100 volte il numero 1800, infatti $1900 - 100 = 1800$, $1901 - 101 = 1800$, ...

8. 21

9. 15 anni e 1 mese

10. 1554 euro, 999 euro, 555 euro

11. 44

12. 26

13. Minore di 1, per l'esattezza $100/101$

14. Se le frazioni a/b e c/d sono equivalenti, lo sono anche le frazioni $(a + b)/b$ e $(c + d)/d$.

15. $25/8$

16. a) $16 - 8\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$ b) $4(3\sqrt{3} - 4)$
c) $3(5 + 2\sqrt{5})$ d) $37 - 8\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

17. Si ha $d < b < a < c < e$, quindi il numero più grande è e

18. $b^2 < ab < a^2$

19. 1556.86 m

20. 5120 g
- a) 2^{-4} b) 3^3 c) $2 \sqrt[12]{2} = 2^{13/12}$
21. d) 2 e) $\sqrt{x^4 y / 2^3} = (x^2/2)\sqrt{y/2}$ f) $x^2 y^{k-1}$
 g) $\sqrt[15]{3^2}$ h) -3 i) 5^2
22. $(3^3)^3 = 3^9 \neq 3^{(3^3)} = 3^{27}$
23. $4.4 \leq x + y \leq 4.7, -1.9 \leq x - y \leq -1.6, 4.03 \leq xy \leq 4.8$ e $0.41 \leq x/y \leq 0.48$
24. a) $-1/16$ b) $-115/192$
25. -3
26. $3^{1/2}$
27. È vera solo la b)
28. Il più piccolo è $x = ac/(a + b)$
29.
 - È più grande $\sqrt{3} + \sqrt{17}$
 - È più grande $2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$
 - È più grande $2 + \sqrt[5]{31}$
30. 1.00099
31. $c < -b < a < 0 < -a < b < -c$
32. $2a + b$ può essere uguale a 7, 1, -1 , -7 .
33. a) Se x e y sono numeri positivi con $x < y$ allora $|x| < |y|$
 b) Se x e y sono numeri negativi con $x < y$ allora $|x| > |y|$
 c) Se x e y sono numeri negativi con $|x| < |y|$ allora $x > y$
34. La produzione è diminuita del 25%.
35. a) 52%
 b) No
36. a) 640
 b) 105
 c) 26
 d) 460
37. 119855
38. 400 euro
39. È più conveniente la seconda confezione.
40. È diminuito dello 0.25%.
41. 360
42. Circa 16.7%
43. $-5/3$ e $1/7$
44. a) $xy\sqrt{xy}$ b) $\frac{x}{y(x+y)^2} \sqrt[4]{\frac{4x^2y^2(x-y)}{(x+y)^3}}$

45. a) MCD = $3ab$, mcm = $6a^3b^2$ b) MCD = $9x$, mcm = $18x^2y$
 c) MCD = $5m$, mcm = $300a^3m^2xy^3$
46. a) $-x^3 + 5x^2 + 5x - 10$
 b) $2x^5 + x^4 - 10x^3 - 2$
 c) $8x^4 - 14x^3 - 24x^2 + 46x - 7$
 d) $2x^6 - 6x^5 - 6x^3 + 16x^2 + 12x - 18$
 e) $q(x) = x + 1, r = 4$
 f) $q(x) = 2x^3 + 5x^2 + 10x + 20, r = 33$
 g) $q(x) = x^3 + (1/2)bx^2 - (7/4)b^2x + (1/8)b^3, r = (5/16)b^4$
47. a) -2
 b) $2 + 5b^2$
 c) $5b^3$
48. a) MCD = $x - 1$, mcm = $(x - 1)^2(x - 3)$
 b) MCD = $x^2 + x + 1$, mcm = $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)$
 c) MCD = $\sqrt{2}x - \sqrt{3}$, mcm = $(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3})(x + 1)$
49. $p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
50. 8
51. $p(x) = x^5 - 3x^3 + 6x^2 - 7x + 11$
- a) $5x^2y(2x - y)$ b) $a(s + 2t)(as + 2at - 1)$
 c) $(pq + 8)(pq - 8)$ d) $(x + y + 7z)(x + y - 7z)$
 52. e) $(2x + 10y)(4x^2 - 20xy + 100y^2)$ f) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^6 - a^3b^3 + b^6)$
 g) $a^9 - b^9 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^6 + a^3b^3 + b^6)$ h) $(11x^n - 9y^{2n})(11x^n + 9y^{2n})$
 i) $(2r^4 - 3(s + 5t))(4r^8 + 6r^4(s + 5t) + 9(s + 5t)^2)$ l) $y(x^n - 11)(x^n + 2)$
- a) $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$ b) $(x^3 + 2)(x - 1)(x^2 + x + 1)$
 53. c) $(x - 1)(x^2 + 4x + 7)$ d) $(x - 1)^2(x + 1)^2(x^2 - x + 1)$
 e) $(x - 1)(x + 1)^2(x^2 - x + 1)$ f) $(x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11})(x^2 + 2)$
54. a) $4a^2 + 4ab + b^2$ b) $9x^2 - 12xy + 4y^2$ c) $4a^2x - 12abxy + 9b^2y^2$
 d) $a^2 - 2a\sqrt{b} + b$ e) $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$ f) $27x^3y^3 + 54x^2y^2 + 36xy + 8$
55. a) $(x - 3)(x - 1)(x + 5)$ b) $(b - 1)(b - 5)^2$
 c) $(b - 3)(b - 2)(b + 5)$ d) $(x - m)(x + m)(x - 2m)(x - 4m)$
56. a) $x \neq 0$ b) $a \neq 0 \wedge x \neq -1$ c) $x \neq -1 \wedge x \neq 1$ d) $x \neq -1 \wedge x \neq 1$
 e) $\forall x \in \mathbb{R}$ f) $x \neq -2$ g) $x \neq 0 \wedge x \neq 3/2$ h) $a \neq 0 \wedge b \neq 0$
57. a) $\frac{1}{x(x - 1)}$ b) $\frac{x + 5}{(x - 1)(x + 1)^2}$ c) $\frac{x(x - 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)}$
58. 10^9
59. $6378.145 = 6.378145 \cdot 10^3 \text{ km} = 6.378145 \cdot 10^8 \text{ cm}$
60. $1.4959965 \times 10^{13} \text{ cm} = 1.4959965 \times 10^8$
 Velocità della luce in m/s vale circa $3 \cdot 10^8$

2

Geometria elementare

2.1 Soluzioni degli esercizi proposti

1. Soluzione: 14 cm^2

La diagonale AC divide il quadrilatero nei due triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$. Il segmento PQ , che unisce i punti medi di AB e di BC , è parallelo ad AC ed è lungo la metà di AC ; analogamente il segmento SR , che unisce i punti medi di CD e di DA , è parallelo ad AC ed è lungo la metà di AC . Pertanto i segmenti PQ e QR sono paralleli e congruenti: ciò è sufficiente per affermare che il quadrilatero $PQRS$ è un parallelogramma. Il triangolo $\triangle PBQ$ è simile al triangolo $\triangle ABC$ con rapporto di similitudine $1/2$, quindi l'area di $\triangle PBQ$ vale $1/4$ dell'area di $\triangle ABC$; analogamente il triangolo $\triangle SDR$ è simile al triangolo $\triangle ADC$ con rapporto di similitudine $1/2$ e la sua area vale $1/4$ di quella di $\triangle ADC$. Si ottiene quindi

$$\mathcal{A}_{\triangle PBQ} + \mathcal{A}_{\triangle SDR} = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{\triangle ABC} + \frac{1}{4}\mathcal{A}_{\triangle ADC} = \frac{1}{4}(\mathcal{A}_{\triangle ABC} + \mathcal{A}_{\triangle ADC}) = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{ABCD}$$

Con procedimento analogo, tracciando la diagonale BD si ottiene

$$\mathcal{A}_{\triangle ASP} + \mathcal{A}_{\triangle QCR} = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{ABCD}$$

Quindi si ha

$$\mathcal{A}_{PQRS} = \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{\triangle PBQ} + \mathcal{A}_{\triangle SDR} + \mathcal{A}_{\triangle ASP} + \mathcal{A}_{\triangle QCR}) = \mathcal{A}_{ABCD} - \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD} = 14 \text{ cm}^2$$

2. Soluzione: $[83(\sqrt{2} + 1)]^2 \simeq 40152.03 \text{ cm}^2$

Indichiamo con l il lato del quadrato e con d la sua diagonale. Allora $d = l\sqrt{2}$ ed il testo dell'esercizio ci dice che $d = l + 83$. Quindi

$$d = l + 83 \Leftrightarrow l\sqrt{2} = l + 83 \Leftrightarrow l(\sqrt{2} - 1) = 83 \Leftrightarrow l = \frac{83}{\sqrt{2} - 1} = 83(\sqrt{2} + 1)$$

Quindi si ha

$$\mathcal{A} = l^2 = [83(\sqrt{2} + 1)]^2 \simeq 40152.03 \text{ cm}^2$$

3. Soluzione: 10°

Siano AH l'altezza uscente da A ed AK la bisettrice dell'angolo \hat{A} (K è un punto del lato BC). Indichiamo con y l'ampiezza dell'angolo \hat{C} e con x l'ampiezza dell'angolo \hat{HAK} . Allora $\hat{C} = y$, $\hat{B} = y + 20^\circ$, $\hat{BAH} = 90^\circ - (y + 20^\circ)$, $\hat{HAC} = 90^\circ - y$, $\hat{BAK} = \hat{BAH} + \hat{HAK} = 90^\circ - (y + 20^\circ) + x$, $\hat{KAC} = \hat{HAC} - \hat{HAK} = 90^\circ - y - x$. Essendo AK la bisettrice dell'angolo \hat{A} si ha

$$\hat{BAK} = \hat{KAC} \Leftrightarrow 90^\circ - (y + 20^\circ) + x = 90^\circ - y - x \Leftrightarrow x = 10^\circ$$

4. Soluzione: 10 cm

Un quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza se e solo se la somma delle misure di due suoi lati opposti è uguale alla somma degli altri due. Quindi nel nostro caso si ha

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA} \Leftrightarrow \overline{DA} = \overline{AB} + \overline{CD} - \overline{BC} = 7 + 9 - 6 = 10 \text{ cm}$$

5. Soluzione: sì

Un quadrilatero è inscritto in una circonferenza se e solo se i suoi angoli opposti sono supplementari (cioè la loro somma vale 180°):

$$\alpha + \gamma = 120^\circ + 60^\circ = \beta + \delta = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$$

Osservazione: nel testo dell'esercizio c'è un dato superfluo. Infatti la somma degli angoli interni di un quadrilatero è 360° , quindi noti tre angoli anche il quarto è univocamente determinato.

6. Soluzione: 4 cm

In un triangolo equilatero $h = l(\sqrt{3}/2)$, quindi

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}lh = \frac{1}{2}l\frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

Ponendo

$$\frac{\sqrt{3}}{4}l^2 = 27\sqrt{3}$$

si ottiene $l^2 = 108$ da cui $l = 6\sqrt{3}$. Uniamo il punto P con i vertici A , B e C : il triangolo viene suddiviso in tre triangoli $\triangle APB$, $\triangle BPC$ e $\triangle CPA$. Si ha

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{APB} + \mathcal{A}_{BPC} + \mathcal{A}_{CPA}$$

e sapendo che $\overline{PH} = 2$ cm e $\overline{PK} = 3$ cm si ottiene

$$27\sqrt{3} = \frac{12\sqrt{3}}{2} + \frac{18\sqrt{3}}{2} + \frac{6\sqrt{3}\overline{PT}}{2} \Leftrightarrow 12\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\overline{PT} \Leftrightarrow \overline{PT} = 4 \text{ cm}$$

Osservazione: l'altezza del triangolo $\triangle ABC$ vale $l\sqrt{3}/2 = 9$ cm così come la somma $\overline{PH} + \overline{PK} + \overline{PT} = 2 + 3 + 4 = 9$ cm. Questo fatto vale in generale: considerando un punto P interno ad un triangolo equilatero, la somma delle distanze di P dai lati del triangolo è sempre uguale alla misura dell'altezza.

7. Soluzione: 1 cm, 2 cm, 3 cm

Indichiamo con r_1 , r_2 e r_3 i raggi delle tre circonferenze. Si ha

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 3 \\ r_2 + r_3 = 5 \\ r_1 + r_3 = 4 \end{cases}$$

Sommando termine a termine si ottiene

$$2(r_1 + r_2 + r_3) = 12 \Leftrightarrow r_1 + r_2 + r_3 = 6$$

quindi

$$r_1 = 6 - (r_2 + r_3) = 6 - 5 = 1 \quad r_2 = 6 - (r_1 + r_3) = 6 - 4 = 2 \quad r_3 = 6 - (r_1 + r_2) = 6 - 3 = 3$$

8. Soluzione: trapezio (AB e $A'B'$ sono paralleli)

Tracciamo la tangente comune in P alle due circonferenze. Gli angoli indicati con 1 e 2 (vedi Figura 2.1) sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BP quindi sono congruenti; analogamente gli angoli indicati con 3 e 4 sono congruenti perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco PB' . L'angolo 2 è congruente all'angolo 3 perché sono opposti al vertice, ne segue che anche l'angolo 1 è congruente all'angolo 4. Di conseguenza i segmenti AB e $A'B'$ sono paralleli perché, tagliati dalla trasversale AA' formano angoli alterni interni uguali.

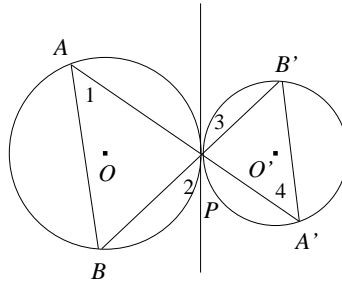


Figura 2.1: Figura esercizio 8.

9. Soluzione: 6 cm^2

Indichiamo con \mathcal{A} l'area del triangolo $\triangle ABC$, con \mathcal{C}_1 l'area del semicerchio di diametro AB , con \mathcal{C}_2 l'area del semicerchio di diametro AC e con \mathcal{C}_3 l'area del semicerchio di diametro BC . Allora

$$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \mathcal{A} + \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_3 = 6 + \frac{9}{8}\pi + 2\pi - \frac{25}{8}\pi = 6 \text{ cm}^2$$

10. Soluzione: $2b(1 + 1/\sin \alpha)$

Dato il triangolo isoscele $\triangle ABC$, tracciamo l'altezza CH . In un triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base è una mediana e una bisettrice dell'angolo al vertice, quindi $AH = b$ e $\widehat{ACH} = \alpha$. Il triangolo $\triangle ACH$ è rettangolo pertanto $\overline{AH}/\overline{AC} = \sin \alpha$ da cui $\overline{AC} = \overline{AH}/\sin \alpha = b/\sin \alpha$. La misura del perimetro di $\triangle ABC$ è allora

$$2p = 2b + \frac{b}{\sin \alpha} + \frac{b}{\sin \alpha} = 2b \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha} \right)$$

11. Soluzione: $\mathcal{A}_{\triangle AMC} = 5 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_{\triangle ABPN} = 5 \text{ cm}^2$

Il triangolo $\triangle AMC$, considerando MC come base, ha la stessa altezza del triangolo $\triangle ABC$ e $\overline{MC} = \overline{BC}/2$, quindi la sua area è metà di quella del triangolo $\triangle ABC$. I triangoli $\triangle APM$ e $\triangle APN$ hanno la stessa area perché MN è parallelo ad AP e quindi M e N hanno la stessa distanza da AP . Quindi

$$\mathcal{A}_{\triangle ABPN} = \mathcal{A}_{\triangle ABP} + \mathcal{A}_{\triangle APN} = \mathcal{A}_{\triangle ABP} + \mathcal{A}_{\triangle APM} = \mathcal{A}_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\triangle ABC} = 5 \text{ cm}^2$$

Naturalmente $\mathcal{A}_{\triangle ABM} = \mathcal{A}_{\triangle AMC}$.

12. Soluzione: $2p = (50 + 6\sqrt{3}) \text{ cm}$, $\mathcal{A} = 114\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Dal vertice C tracciamo la perpendicolare ad AB . Il triangolo $\triangle CHB$ è rettangolo e $\widehat{B} = 60^\circ$, quindi

$$\overline{CH} = \overline{CB} \sin 60^\circ = 12 \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\overline{HB} = \overline{CB} \cos 60^\circ = 12 \frac{1}{2} = 6 \text{ cm}$$

$$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB} = 16 + 6 = 22 \text{ cm}$$

Quindi

$$2p = \overline{AB} + \overline{CB} + \overline{DC} + \overline{AD} = (22 + 12 + 16 + 6\sqrt{3}) = 50 + 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

e

$$\mathcal{A} = \frac{(\overline{AB} + \overline{DC}) \overline{CH}}{2} = 114\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

13. Soluzione: 2 cm

Indichiamo con R il raggio della circonferenza maggiore e con r il raggio della circonferenza minore. Allora $R - r = 1$ cm e $\pi(R^2 - r^2) = 5\pi$ cm² quindi

$$\begin{cases} R - r = 1 \\ R^2 - r^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R - r = 1 \\ (R - r)(R + r) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R - r = 1 \\ R + r = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 3 \\ r = 2 \end{cases}$$

14. Soluzione: $4\sqrt{3}/3 + 2$ cm

L'angolo in D è retto, quindi $\widehat{ADP} = 30^\circ$, $\widehat{PDB} = 30^\circ$ e $\widehat{BDC} = 30^\circ$. Considerando il triangolo $\triangle APD$ si ha

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{PD}} = \cos 30^\circ \Leftrightarrow \overline{PD} = \frac{\overline{AD}}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ cm}$$

Considerando il triangolo $\triangle ABD$ si ha

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{\overline{AD}}{\cos 60^\circ} = 2 \text{ cm}$$

Il triangolo $\triangle BDP$ è isoscele in quanto $\widehat{PDB} = \widehat{PBD} = 30^\circ$, quindi $\overline{PB} = \overline{DP} = 2\sqrt{3}/3$ cm. Il perimetro di $\triangle BDP$ è allora

$$\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + 2 = \frac{4}{3}\sqrt{3} + 2 \text{ cm}$$

15. Soluzione: 15

Considerando il triangolo $\triangle ABC$ e tenendo presente la disuguaglianza triangolare si ha $1 < \overline{AC} < 19$.

Analogamente considerando il triangolo $\triangle ACD$ si ha $14 < \overline{AC} < 24$, quindi la misura di AC deve verificare la condizione $14 < \overline{AC} < 19$ e tra quelle presenti l'unica possibilità è 15.

16. Soluzione: $1/3$

I triangoli $\triangle CDE$, $\triangle AEF$, $\triangle FBD$ sono rettangoli con angoli acuti di 30° e 60° . Indichiamo con l la misura di DE , quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\triangle DEF} &= \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \\ \overline{BD} &= \frac{2l\sqrt{3}}{3} & \overline{DC} &= l \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \overline{BC} &= \overline{BD} + \overline{DC} = l\sqrt{3} \end{aligned}$$

L'area di $\triangle ABC$ vale $3l^2\sqrt{3}/4$ e quindi

$$\frac{\mathcal{A}_{\triangle DEF}}{\mathcal{A}_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3}$$

17. Soluzione: 24π cm²

I triangoli $\triangle ODE$ e $\triangle CDF$ sono simili perché rettangoli ($\widehat{DOE} = \widehat{DFC} = 90^\circ$) e con un angolo in D in comune, quindi vale $\overline{DE} : \overline{CD} = \overline{OD} : \overline{DF}$ da cui

$$6 : 2r = r : 8$$

avendo indicato con r il raggio del cerchio e tenendo conto che

$$\overline{DF} = \overline{DE} + \overline{EF} = 6 + 2 = 8 \text{ cm}$$

Quindi $2r^2 = 48$ da cui $r^2 = 24$ e l'area del cerchio vale 24π cm².

18. Soluzione: $4/9$ cm

Con riferimento alla Figura 2.2, indichiamo con A il centro della circonferenza di raggio 1, con B il centro della circonferenza di raggio 4 e con O il centro della terza circonferenza. Indichiamo con x il raggio della terza circonferenza, allora

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= 1 + 4 = 5 \text{ cm} & \overline{BC} &= 4 - 1 = 3 \text{ cm} & \overline{KR} &= \overline{OT} = \overline{HS} = x \\ \overline{AO} &= 1 + x & \overline{OB} &= 4 + x & \overline{AK} &= 1 - x & \overline{BH} &= 4 - x\end{aligned}$$

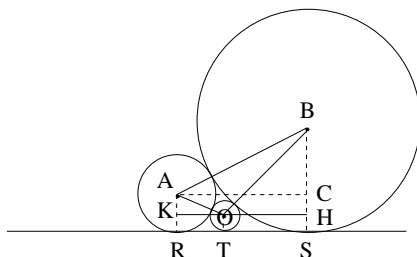


Figura 2.2: Figura esercizio 18.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\triangle ABC$ si ottiene

$$\overline{AC} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

quindi avremo anche $\overline{KH} = 4$ cm. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\triangle AKO$ si ottiene

$$\overline{KO} = \sqrt{(1+x)^2 - (1-x)^2} = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x} \text{ cm}$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\triangle BOH$ si ottiene

$$\overline{OH} = \sqrt{(4+x)^2 - (4-x)^2} = \sqrt{16x} = 4\sqrt{x} \text{ cm}$$

Quindi $\overline{KH} = \overline{KO} + \overline{OH} = 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x} = 6\sqrt{x}$, ma $\overline{KH} = 4$ cm da cui

$$6\sqrt{x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{9} \text{ cm}$$

19. Soluzione: 5 cm

I triangoli $\triangle ABE$ e $\triangle ACD$ sono simili.

$$\mathcal{A}_{\triangle ACD} = \mathcal{A}_{\triangle ABE} - \mathcal{A}_{CBED} = 100 - 75 = 25 \text{ cm}^2$$

Il rapporto tra le aree dei due triangoli simili è $1/4$, quindi il rapporto tra le misure lineari dei due triangoli è $1/2$. Poiché

$$\overline{BE} = \frac{2\mathcal{A}_{\triangle ABC}}{h} = 10 \text{ cm}$$

si ha

$$\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{BE} = 5 \text{ cm}$$

20. Soluzione: 3

La cosa migliore è ragionare sugli angoli esterni: la somma delle ampiezze degli 8 angoli esterni è 360° , quindi al massimo 3 di questi angoli possono essere retti; di conseguenza saranno al massimo 3 anche gli angoli retti del poligono.

21. Soluzione: 27 m^2 e 75 m^2

Indicando con E l'intersezione dei prolungamenti dei lati AD e BC del trapezio si ha che i due triangoli $\triangle ABE$ e $\triangle DCE$ sono simili con rapporto di similitudine pari al rapporto tra le basi $\overline{AB}/\overline{CD} = 5/3$; il rapporto tra le aree vale allora $(5/3)^2 = 25/9$. Sia x l'area del triangolo $\triangle DCE$ allora

$$\frac{x + 48}{x} = \frac{25}{9} \Leftrightarrow x = 27 \text{ m}^2$$

Quindi $\mathcal{A}_{\triangle DCE} = 27 \text{ m}^2$ e $\mathcal{A}_{\triangle ABE} = 27 + 48 = 75 \text{ m}^2$.

22. Soluzione: 162 cm^2

I triangoli $\triangle ABE$ e $\triangle ABD$ hanno la stessa area perché hanno la base AB in comune ed uguale altezza (distanza tra le basi del trapezio); da ciò segue che anche i triangoli $\triangle ACE$ e $\triangle BCD$ hanno la stessa area in quanto ottenuti dai triangoli $\triangle ABE$ e $\triangle ABD$ sottraendo il triangolo comune $\triangle ABC$. Indichiamo l'area di $\triangle ABC$ con \mathcal{A}_1 , l'area di $\triangle BCD$ con \mathcal{A}_2 , l'area di $\triangle DCE$ \mathcal{A}_3 e l'area di $\triangle ACE$ \mathcal{A}_4 . I triangoli $\triangle ACE$ e $\triangle ECD$ hanno la stessa altezza relativa alle basi AC e CD (distanza di E da AD) quindi le loro aree sono proporzionali alle rispettive basi, cioè $\mathcal{A}_3/\mathcal{A}_4 = \overline{CD}/\overline{AC}$. Analogamente i triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle CBD$ hanno la stessa altezza relativa alle basi AC e CD (distanza di B da AD) e quindi $\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1 = \overline{CD}/\overline{AC}$. Confrontando le due proporzioni si ha

$$\mathcal{A}_3/\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_4 \cdot \mathcal{A}_2$$

Nota bene: questo risultato vale in generale per qualsiasi quadrilatero convesso, diviso in quattro triangoli dalle due diagonali.

Nel nostro caso abbiamo $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_2$, quindi $\mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2^2 = \mathcal{A}_4^2$ e sostituendo i valori numerici si ottiene

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_4 = \sqrt{50 \cdot 32} = \sqrt{1600} = 40 \text{ cm}^2$$

L'area del trapezio vale allora $50 + 40 + 32 + 40 = 162 \text{ cm}^2$.

23. Soluzione: $30 - 6\sqrt{2} \text{ cm}$

Indichiamo con l la misura del lato dei quadrati e con $d = l\sqrt{2}$ la misura delle diagonali; il perimetro della figura è dato da

$$2p = 6l + 4 \left(l - \frac{d}{2} \right) = 10l - 2d = 10l - 2l\sqrt{2}$$

Sostituendo $l = 3 \text{ cm}$ si ottiene $2p = 30 - 6\sqrt{2} \text{ cm}$.

24. Soluzione: 45

Il volume del parallelepipedo è $V_P = 30 \cdot 30 \cdot 50 = 45000 \text{ cm}^3$. Per riempirlo con il minimo numero di cubetti devo utilizzare cubetti di volume massimo possibile. Poiché il massimo comun divisore tra 30 cm e 50 cm è 10 cm , la dimensione massima di tali cubi è 10 cm ed il loro volume $V_C = 1000 \text{ cm}^3$. Quindi servono $V_P/V_C = 45$ cubetti.

25. Soluzione: il volume aumenta di un fattore $9/2$

Il volume di un cono con raggio di base r ed altezza h vale $V_C = \pi r^2 h/3$. Consideriamo adesso un cono con raggio di base $r_1 = 3r$ ed altezza $h_1 = h/2$: il suo volume è

$$V_{C_1} = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3} \pi (3r)^2 \frac{h}{2} = \frac{9}{2} V_C$$

26. Soluzione: $15625 \pi/6 \text{ cm}^3$

Se il diametro del cocomero è 50 cm, il suo raggio è 25 cm; il volume di una sfera di raggio 25 cm è

$$V_S = \frac{4}{3} \pi 25^3 = \frac{4}{3} \pi 15625 \text{ cm}^3$$

quindi il volume di ciascuna fetta è

$$V_F = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi 15625 = \frac{15625}{6} \pi \text{ cm}^3$$

27. Soluzione: 14 cm

L'ipotenusa del triangolo rettangolo è CB la cui misura vale 10 cm (si applica il teorema di Pitagora). Il diametro della circonferenza circoscritta coincide con l'ipotenusa CB . Per calcolare il raggio della circonferenza inscritta osserviamo che i segmenti di tangente condotti da un punto esterno ad una circonferenza sono congruenti, quindi $\overline{AH} = \overline{AK} = r$ (r raggio della circonferenza inscritta); inoltre $\overline{HB} = \overline{TB}$ e $\overline{CK} = \overline{CT}$ (H, K e T sono i punti di tangenza della circonferenza inscritta). Si ha

$$\overline{AH} + \overline{AK} + \overline{HB} + \overline{CK} + \overline{CB} = 2p_{\triangle ABC}$$

da cui

$$2r + 2\overline{CB} = 2p \Leftrightarrow r = p - \overline{CB} = 12 - 10 = 2 \text{ cm}$$

Il diametro della circonferenza inscritta misura allora 4 cm e la somma cercata vale 14 cm.

28. Soluzione: tre possibili soluzioni, 80 m^2 , 180 m^2 , 500 m^2

Ci sono tre possibili soluzioni diverse tra loro che dipendono dalla disposizione relativa dei tre triangoli; per il calcolo esplicito utilizza il risultato visto nell'esercizio 22.

29. Soluzione: $1/3 \text{ m}$

Il centro della circonferenza inscritta si trova su OT , bisettrice dell'angolo \widehat{AOB} (vedi Figura 2.3). Indichiamo con x il raggio di questa circonferenza. Allora

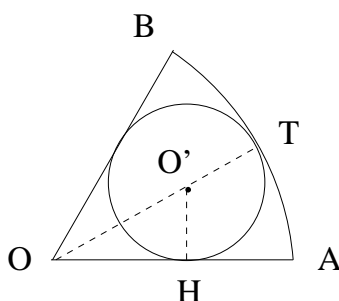


Figura 2.3: Figura esercizio 29.

$$\overline{O'H} = \overline{O'T} = x \quad \overline{OO'} = 1 - x$$

Poiché $\widehat{OO'H} = 30^\circ$ si ha $\overline{OO'} = 2\overline{O'H}$ quindi $1 - x = 2x$ da cui $x = 1/3 \text{ m}$.

30. Soluzione: se il triangolo è qualunque il problema è indeterminato, non abbiamo sufficienti informazioni per calcolare il perimetro. Se il triangolo è rettangolo ha angoli acuti pari a 30° e 60° , cateti lunghi 2 cm e $2\sqrt{3}$ cm, ipotenusa lunga 4 cm e di conseguenza perimetro pari a $6 + 2\sqrt{3}$ cm.

31. Soluzione: $9\sqrt{3} - 3\pi \text{ cm}^2$

Indichiamo con R ed S i punti di tangenza e con O il centro della circonferenza. Si ha che $\widehat{OPR} = \widehat{OPS} = 30^\circ$, quindi $\overline{PR} = \overline{PS} = r\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ cm. L'area richiesta è data dalla differenza tra l'area del quadrilatero $PROS$ e quella del settore circolare ROS .

$$A_{PROS} = 2A_{\triangle POR} = 2 \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

L'area del settore circolare è $1/3$ dell'area del cerchio perché l'angolo \widehat{ROS} vale 120° quindi

$$\mathcal{A}_{ROS} = \frac{1}{3} \pi r^2 = 3 \pi \text{ cm}^2$$

L'area richiesta è quindi $9\sqrt{3} - 3\pi \text{ cm}^2$.

32. Soluzione: $2p = 4 + 2\sqrt{3} \text{ cm}$, $\alpha = 120^\circ$, $\beta = \gamma = 30^\circ$.

Sia H la proiezione di A sulla base BC . Si ha

$$\overline{AH} = \frac{2\mathcal{A}_{\triangle ABC}}{\overline{BC}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1 \text{ cm} \quad \overline{BH} = \overline{HC} = \frac{\overline{BC}}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HC}^2} = 2 \text{ cm}$$

$$2p = (2 + 2 + 2\sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3} \text{ cm} \quad \sin \beta = \sin \gamma = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$$

da cui $\beta = \gamma = 30^\circ$ e $\alpha = 120^\circ$.

33. Soluzione: 8 cm.

Sia O il punto di incontro delle diagonali ed il rombo abbia vertici A, B, C, D con angoli acuti in A e C . Allora $\widehat{OAD} = 15^\circ$ e $\widehat{ODA} = 75^\circ$. Indicando con x la misura di OD e con y quella di AO e sfruttando l'informazione sull'area si ha $xy = 1$. Considerando il triangolo $\triangle OAD$ si ha

$$y = x \tan 75^\circ \quad x = y \tan 15^\circ$$

Sostituendo nella relazione $xy = 1$ si ottiene

$$x^2 = \frac{1}{\tan 75^\circ} \quad y^2 = \frac{1}{\tan 15^\circ}$$

da cui

$$\overline{AD}^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{\tan 75^\circ} + \frac{1}{\tan 15^\circ}$$

Poiché $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ (verificalo) e $\tan 75^\circ = 1/\tan 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ si ottiene $x^2 + y^2 = 4 \text{ cm}$. Pertanto il lato del rombo misura 2 cm ed il suo perimetro vale 8 cm.

34. Soluzione: 4.5

Indichiamo con x l'area del quadrilatero $AMPN$; per evidenti ragioni di simmetria AP divide il quadrilatero in due triangoli congruenti, ciascuno di area $x/2$. Consideriamo i triangoli $\triangle AMC$ e $\triangle AMP$: hanno la stessa altezza relativa alle basi MC e MP , quindi le loro aree sono proporzionali alle basi $\mathcal{A}_{\triangle AMP} / \mathcal{A}_{\triangle AMC} = \overline{MP} / \overline{MC}$.

Considerando i triangoli $\triangle BCM$ e $\triangle BPM$ si osserva che hanno la stessa altezza relativa alle basi MC e MP quindi si ha $\mathcal{A}_{\triangle BPM} / \mathcal{A}_{\triangle BCM} = \overline{MP} / \overline{MC}$.

Confrontando le due uguaglianze si ottiene

$$\frac{\mathcal{A}_{\triangle AMP}}{\mathcal{A}_{\triangle AMC}} = \frac{\mathcal{A}_{\triangle BPM}}{\mathcal{A}_{\triangle BCM}}$$

ovvero

$$\frac{x/2}{x+3} = \frac{3}{3+7} \Leftrightarrow x = 9/2 = 4.5$$

35. Soluzione: 10 cm e 6 cm

Suggerimento: utilizza il teorema di Carnot.

3 Insiemi e funzioni

3.1 Soluzioni degli esercizi proposti

1.

$$A = \{x \in \mathbf{N} : 5 \leq x < 6\} = \{5\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbf{N} : x - 1 = 4\} = \{5\}$$

quindi $A = B$.

2. $A = \{x \in \mathbf{N} : 2 < x \leq 11\}$

a) $\{4, 6, 8, 10\}$

b) $\{11\}$

c) $\{3, 7\}$

3. a) $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 15\}$ e $A \cap B = \{1, 3, 9\}$

b) $C \cup D = \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ e $C \cap D = \{10\}$.

4. 25 studenti hanno svolto correttamente almeno un esercizio. 6 studenti hanno svolto correttamente solo un esercizio. 18 studenti hanno svolto correttamente solo due esercizi. 5 studenti non hanno svolto correttamente alcun esercizio.

5. L'unico insieme vuoto è B .

6.

$$A = \{3, 4\} \quad \text{e} \quad B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A \times B = \{(3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (3, 9), (3, 10),$$

$$(4, -1), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (4, 9), (4, 10)\}$$

7. A, B, C non costituiscono una partizione di \mathcal{U} in quanto $A \cap B = \{6\} \neq \emptyset$.

8.

$$A = \{-1, 0, 1\} \quad \text{e} \quad B = \{0, 1, 2\}$$

9. $x = 5, y = 6, z = 9$ oppure $x = 5, y = 9, z = 6$.

10. Tra le espressioni algebriche presentate rappresentano una funzione reale di variabile reale (x variabile dipendente e y variabile indipendente) le seguenti: a), c), d), e), f), g), l), m), n). Indichiamo con \mathcal{D} l'insieme di definizione (dominio) della funzione.

a) $y = x^2 + 2$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

c) $y = \sqrt[3]{x}$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

d) $y = \sqrt{x^2} = |x|$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

e) $\sin y = x \Leftrightarrow y = \arcsin x$ $\mathcal{D} = [-1, 1]$

f) $\tan y = x \Leftrightarrow y = \arctan x$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

g) $y^3 = x \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x}$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

l) $y = \ln(\sqrt{e^x + |x - 1|})$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

m) $e^y = x^2 - 1 \Leftrightarrow y = \ln(x^2 - 1)$ $\mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

n) $e^{xy} = 2 \Leftrightarrow y = (\ln 2)/x$ $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$

11. Indichiamo con \mathcal{D} il dominio della funzione e consideriamo le seguenti funzioni da $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ (ricorda che restringendo opportunamente il codominio puoi rendere una funzione surgettiva).

- $y = x^2 - 1$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, non è iniettiva, non è surgettiva
- $y = |x|$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, non è iniettiva, non è surgettiva
- $y = 1/x$ $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$, è iniettiva, non è surgettiva
- $y = 3x\sqrt{x^2}$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, è iniettiva, è surgettiva, è biunivoca
- $y = \cos x / \sin x$ $\mathcal{D} = \mathbb{R} - k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, non è iniettiva, è surgettiva
- $y = 5 \sin 2x$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, non è iniettiva, non è surgettiva
- $y = 2 \log_{10} x$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, è iniettiva, è surgettiva, è biunivoca
- $y = e^{-x}$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, è iniettiva, non è surgettiva
- $y = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, non è iniettiva, non è surgettiva

12. a) $(f \circ g)(x) = 2(x-1)^3$, $(g \circ f)(x) = 2x^3 - 1$, $(f \circ f)(x) = 16x^9$
 b) $(f \circ g)(x) = |\sqrt[3]{3|x|}|$, $(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{3|x|}$, $(f \circ f)(x) = |x|$
 c) $(f \circ g)(x) = 3/(3x-2)$, $(g \circ f)(x) = 9/x-2$, $(f \circ f)(x) = x$
 d) $(f \circ g)(x) = \sin(x^2+4)^2$, $(g \circ f)(x) = (\sin x^2)^2 + 4$, $(f \circ f)(x) = \sin(\sin x^2)^2$

13. Se la funzione è biunivoca, intersecando il suo grafico con rette orizzontali del tipo $y = k$ ($k \neq 2$) otterremo sempre una ed una sola intersezione; questo equivale a dire che l'equazione $f(x) = k$ ammette, per $k \neq 2$, una ed una sola soluzione:

$$\frac{2x+7}{x-4} = k \Leftrightarrow (k-2)x = 4k+7$$

L'equazione ottenuta per $k \neq 2$ è lineare e ammette una e una sola soluzione: la funzione $f(x)$ è allora biunivoca. Per calcolare l'inversa di

$$y = \frac{2x+7}{x-4}$$

scambiamo tra loro x ed y

$$x = \frac{2y+7}{y-4}$$

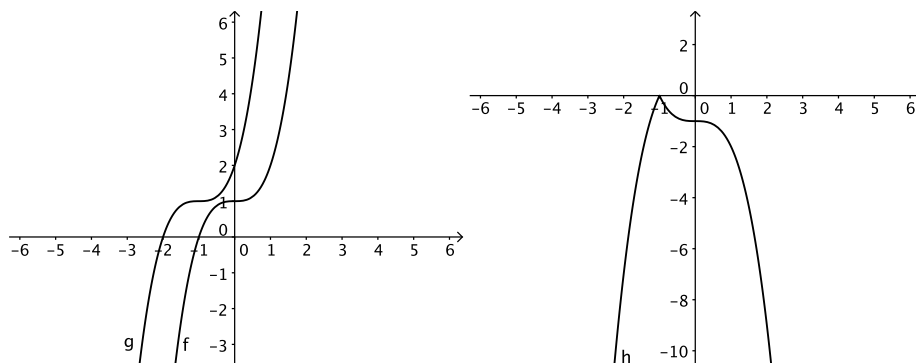
e ricaviamo y :

$$y = \frac{4x+7}{x-2}$$

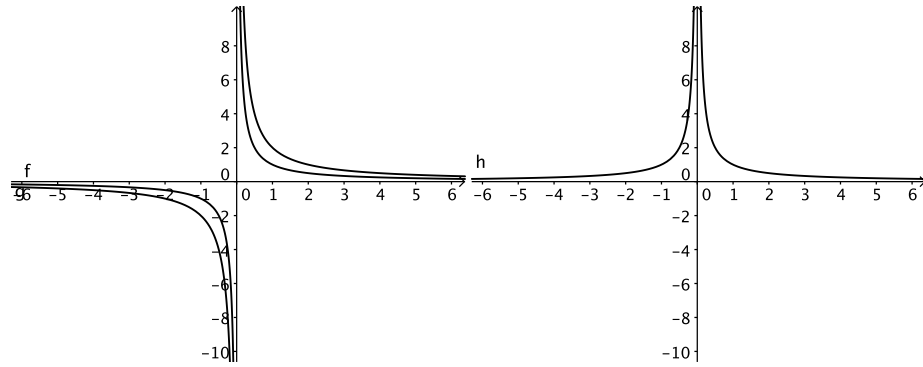
14. $f^{-1}(x) = f(x)$

15. $I = [-3, +\infty)$

16. Sono qui mostrati solo i grafici di a), $g(x)$, e f), $h(x)$.



17. Sono qui mostrati solo i grafici di b), $g(x)$, e e), $h(x)$.

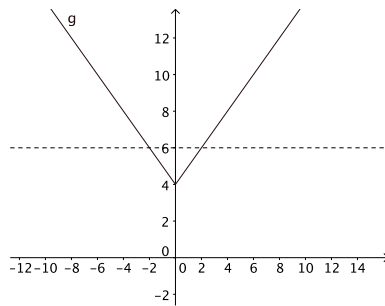


18. La funzione è crescente in $(-2, 0)$ e $(2, +\infty)$, mentre è decrescente in $(-\infty, -2)$ e $(0, 2)$. È monotona decrescente nell'intervallo $(1, 2)$, mentre nell'intervallo $(-2, 1)$ non è monotona.
19. $\mathcal{S}_{100} = 9900$
20. $q = 2/3, \mathcal{S}_5 = 211/108$

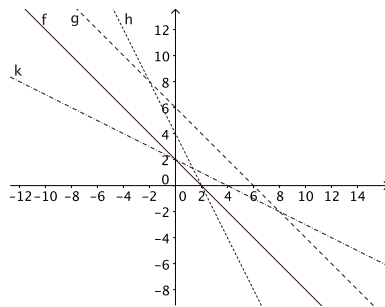
4 Funzioni lineari

4.1 Soluzioni degli esercizi proposti

1. $2.\overline{97} = 295/99$
2. $f^{-1}(x) = x/3 + 4/3$
3. $f^{-1}(x) = -x/2 + 7/2$
4. $x = 2$
5. $g(x) = 6 \Leftrightarrow x = \pm 2$



6. Le funzioni sono rappresentate nella figura sottostante.



7. $r : y = x/2 + 5/2$
 - a) $y = x/2 + 6$
 - b) $y = -2x$
8.
 - a) $P(2, 3)$
 - b) $A(6, 1), B(12, -2)$
9. $P(-1, 1)$
10. $5x - 3y + 8 = 0, P(-19/34, 59/34)$
11. $d_{P,r(A,B)} = 11/\sqrt{17}$
12. $\mathcal{A} = 5/2$
13. $H(1, 0), y = x + 3$

14. $k = 8$

15. $29x - 2y + 33 = 0$

Nota: per risolvere questo esercizio ti può essere utile il seguente risultato.

Date due rette $y = m_1x + q_1$ e $y = m_2x + q_2$ che si incontrano in un punto, l'angolo acuto α formato dalle due rette è tale che

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

Suggerimento: calcola il punto di intersezione delle due rette $x - 2y + 5 = 0$ e $3x - 2y + 7 = 0$ e la retta perpendicolare a $3x - 2y + 7 = 0$ passante per tale punto. Sfruttando la relazione precedente calcola l'angolo tra la direzione del raggio di luce e la normale alla retta di equazione $3x - 2y + 7 = 0$ ed imponi che anche la direzione del raggio riflesso formi lo stesso angolo con la normale.

16. a) $t = \pm 3$ (parallela all'asse delle ordinate)

$t = -2$ (parallela all'asse delle ascisse)

b) $t = 1 \quad \vee \quad t = 5/3$

17. a) $p = 4 \quad \wedge \quad q \neq -2, \quad p = -4 \quad \wedge \quad q \neq 2$

b) $(p, q) = (4, -2), \quad (p, q) = (-4, 2)$

c) $p = 0, \quad q$ qualunque

18. a) $(x, y) = (-2/5, 7/5)$

b) \emptyset

19. a) $x \geq 1/2$

b) $x \leq 2$

20. Sostituendo alla variabile x il valore -1 si deve ottenere un'uguaglianza, quindi:

$$2(-a + 2) + a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2a + 4 + a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3$$

21. $x = 8$ e $y = 12$

22. Equazione del fascio passante per P : $y + 3 = m(x - 2)$.

a) $y = -(3/2)x$

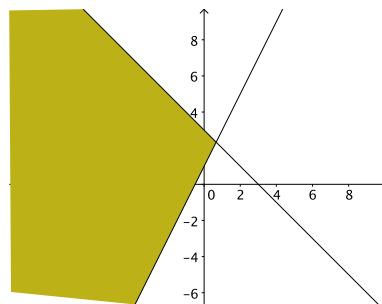
b) $y = -3x + 3, \quad y = x/3 - 11/3$

23. $C(22/3, 10/3)$ oppure $C(2/3, -10/3)$

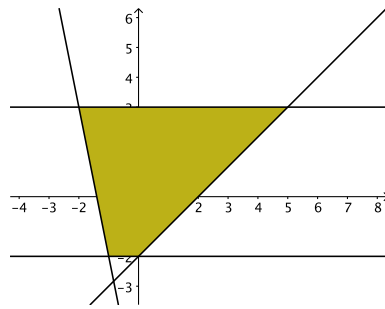
24. $-5 < x \leq -3$

25. Le porzioni di piano sono raffigurate nelle figure sottostanti.

a) L'area della porzione di piano descritta dalle disequazioni è infinita.



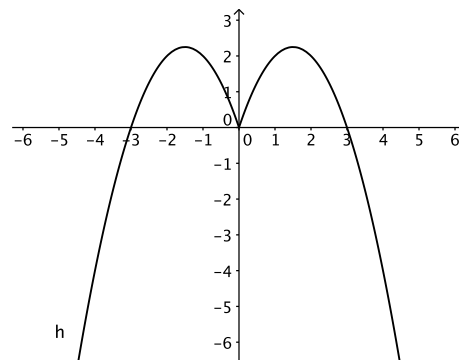
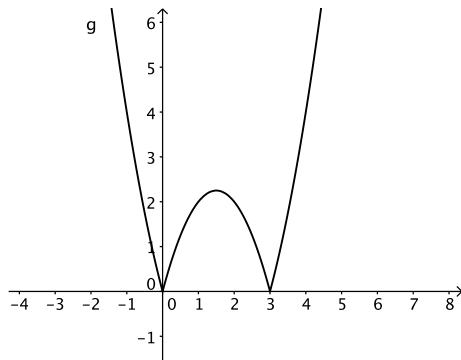
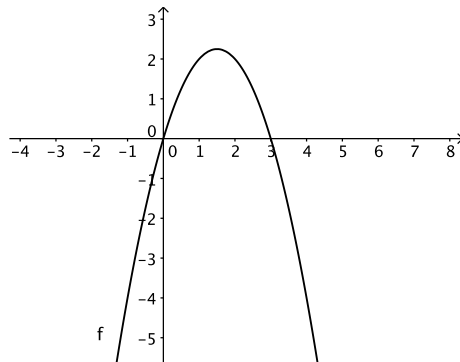
b) L'area della regione descritta dalle disequazioni del punto b) vale 20 (la regione è un trapezio con base maggiore pari a 7, base minore pari a 1 e altezza 5).



5 Funzioni quadratiche

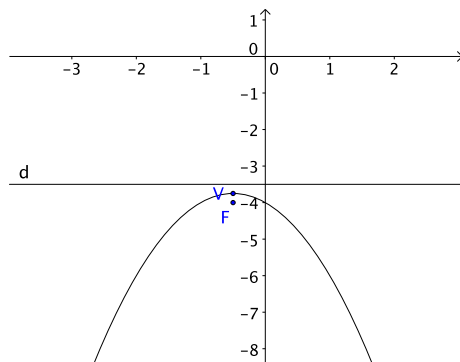
5.1 Soluzioni degli esercizi proposti

1. $a = 17/2$
2. Le funzioni sono rappresentate nelle figure sottostanti.



3. $B(4, -4)$ oppure $B(4, 2)$

4. La parabola $y = -x^2 - x - 4$ ha la concavità rivolta verso il basso e non interseca l'asse delle ascisse, interseca quello delle ordinate nel punto $(0, -4)$. Il vertice è $V(-1/2, -15/4)$, il fuoco è $F(-1/2, -4)$ e la direttrice d ha equazione $y = -7/2$ (vedi figura sottostante).



5. $x = -y^2 + y + 6$
6. a) $y = x^2 - 4x + 5$

b) $y = x^2 - 3x + 2$

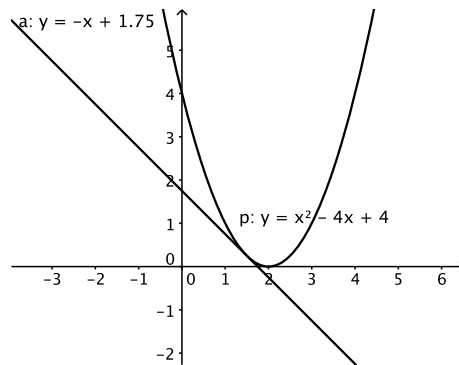
7. $y = 2x^2 - 7x + 5$

8. $A(0, 1) \quad B(10/3, -11/9) \quad \overline{AB} = 10\sqrt{13}/9$

9. $y = 2$ con punto di tangenza $(0, 2)$

$y = -4x + 6$ con punto di tangenza $(2, -2)$

10. $r: y = -x + 7/4$



11. Secante per ogni $k \in \mathbb{R}$

12. $y = x/3 + 9/4$

13. $k = 1$

14. Punti di intersezione: $P(0, 0)$ e $Q(20/9, 160/81)$

Rette tangenti in P : $y = 2x$ e $y = 0$

Rette tangenti in Q : $y = (-2/9)x + 200/81$ e $y = (16/9)x - 160/81$

15. a)

$$\emptyset$$

b)

$$\frac{8}{13} \leq x \leq 1$$

c)

$$\emptyset$$

d)

$$2k - |k|\sqrt{3} < x < 2k + |k|\sqrt{3}$$

e) **Errata corrige:** nel denominatore a secondo membro a deve essere sostituita con k

$$\frac{(-\sqrt{73} - 1)k}{6} \leq x \leq \frac{(\sqrt{73} - 1)k}{6}$$

f)

$$x \leq \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \quad \vee \quad x \geq \frac{5 + \sqrt{37}}{6}$$

g)

$$\mathbb{R}$$

16. a) Se $k = 0$ la disuguaglianza non è verificata. Se $-20 \leq k < 0$ si hanno infinite soluzioni. Se $k < -20$ si ha

$$-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{k}} < x < -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{k}}$$

Se $k > 0$ si ha

$$x < -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{k}} \quad \vee \quad x > -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{k}}$$

b) Se $k \geq 1$ si hanno infinite soluzioni. Se $k < 1$ si ha

$$x \leq 1 - \sqrt{1 - k} \quad \vee \quad x \geq 1 + \sqrt{1 - k}$$

c) Se $k = 1$ la disequazione diventa di primo grado

$$-3x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{2}{3}$$

Se $k \neq 1$ calcoliamo il discriminante dell'equazione di secondo grado associata:

$$\Delta = 9 - 4(1 - k)(-k - 1) = 9 + 4(1 - k)(1 + k) = 9 + 4(1 - k^2) = 13 - 4k^2$$

Si ha $\Delta = 0$ per $k = \pm\sqrt{13}/2$; in particolare, se $k = \sqrt{13}/2$ non si hanno soluzioni della disequazione di partenza, mentre se $k = -\sqrt{13}/2$ l'insieme delle soluzioni della disequazione è $\mathbb{R} - \{3/(2 - 2k)\}$. Per concludere l'esercizio dovrai discutere i casi $\Delta < 0$ e $\Delta > 0$, e contemporaneamente studiare il segno di $1 - k$ per capire se la parabola $y = (1 - k)x^2 - 3x - (k + 1)$ ha la concavità rivolta verso il basso o verso l'alto.

17. $2 \leq x \leq 3$

18. La porzione di piano da disegnare è composta dai punti interni alla parabola di equazione $y = x^2 - 4$ con ordinata in modulo maggiore di 2 e ascissa compresa tra -3 e 3 .

19. La retta $y = (1/3)x + 1$ interseca la parabola $y = x^2 - 3x + 2$ nei punti $P(1/3, 10/9)$ e $Q(3, 2)$. La porzione di piano da disegnare è quella racchiusa dall'arco di parabola tra i punti P e Q e dal segmento PQ (la frontiera è compresa essendo le disuguaglianze non strette).

20. $a = 9$

6 Equazioni e disequazioni

6.1 Soluzioni degli esercizi proposti

- a) $x = -\sqrt[5]{25}$ b) $x = \pm\sqrt[6]{71}$
c) $x = \sqrt[3]{-1 \pm \sqrt{21}}$ d) $x = 0 \quad \vee \quad x = \sqrt[5]{5/4}$
e) $x = 7$ f) $x = 1/2$
1. g) $x = \pm 1, \pm 2$ h) $x = -1/2$
i) $x = 3$ l) $x = -2 \quad \vee \quad x = 0$
m) $x = x_1, x_1 \in (-3, -2)$ n) \emptyset
o) $x = -4/3 \quad \vee \quad x = 1$ p) \emptyset
2. Se l'equazione ammettesse una soluzione positiva x_0 otterremo un primo membro $(x_0 - 4)^2$ non negativo ed un secondo membro $-x_0^3$ negativo. Soluzione: $x = -4$.
- a) $-2 \leq x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 2$ b) $-2 \leq x \leq -1 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq 2$
c) $x \leq -\sqrt[7]{2}$ d) $x \leq -3 \quad \vee \quad x \geq 3$
e) $-7 < x < 0$ f) $x \geq 0$
3. g) $-3 \leq x \leq -2 \quad \vee \quad 2 \leq x \leq 3$ h) $-4 \leq x \leq 4$
i) $3/8 < x < 6 \quad \vee \quad x > 9$ l) $-2 < x < 3/2$
m) $x < -2/3 \quad \vee \quad x > -1/4$ n) $x < 2 \quad \vee \quad (3 - \sqrt{33})/2 < x < (3 + \sqrt{33})/2 \quad \vee \quad x > 5$
o) $(-3 - \sqrt{5})/2 < x \leq 1$ p) $x \geq 3$
4. a) $-1 < x < 1$ b) $1 < x < 4 \quad \vee \quad x \geq 6$
c) $x > 1$ d) $-3 < x \leq -2 \quad \vee \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \vee \quad 2 \leq x < 3$
5. a) $x < \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \quad \vee \quad \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < x < 2 \quad \vee \quad x > 2$ b) $x < 1$
c) $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ d) \emptyset
6. $x < -3 \quad \vee \quad -3 < x < -\sqrt{7} \quad \vee \quad \sqrt{7} < x < 3 \quad \vee \quad x > 3$
7. a) $x = 1$ b) Vedi Figura 6.1
c) $-1 \leq x \leq 2$ d) $x \geq 3/5$
8. $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \quad \vee \quad x \geq 4$
Vedi Figura 6.2.
9. Vedi Figura 6.3.
10. Vedi Figura 6.4.
11. Vedi Figura 6.5.
12. Vedi Figura 6.6.

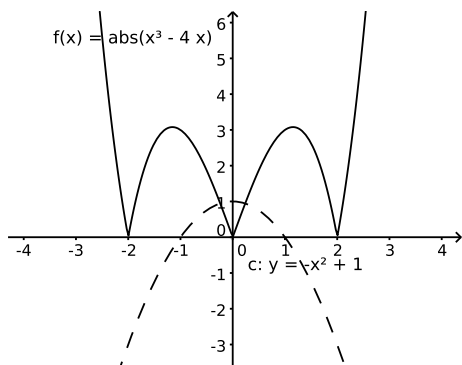


Figura 6.1: Risoluzione grafica della disequazione $|x^3 - 4x| \geq 1 - x^2$ (Esercizio 7, parte b).

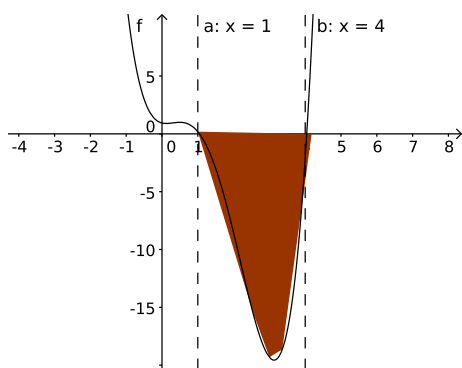


Figura 6.2: Risoluzione grafica della seconda parte dell'Esercizio 8.

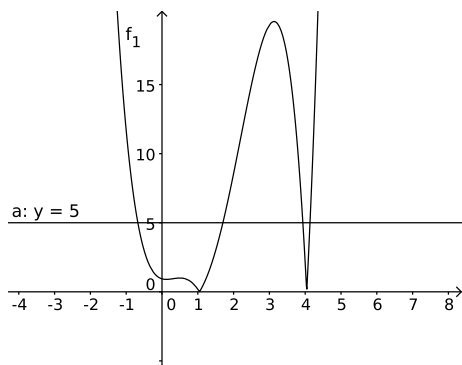


Figura 6.3: Risoluzione grafica dell'Esercizio 9.

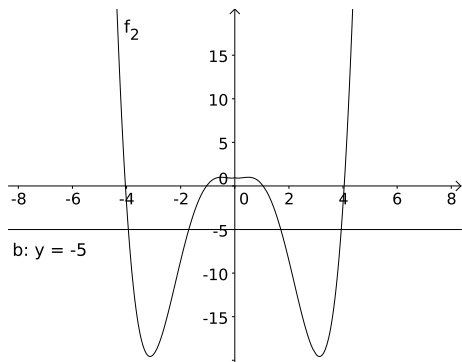


Figura 6.4: Risoluzione grafica dell'Esercizio 10.

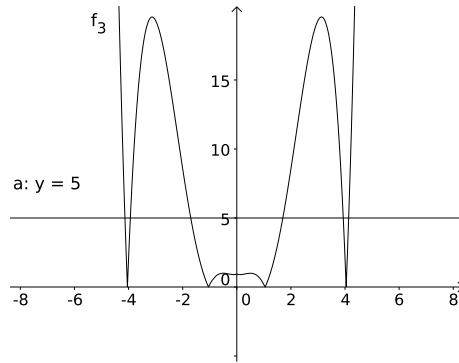


Figura 6.5: Risoluzione grafica dell'Esercizio 11.

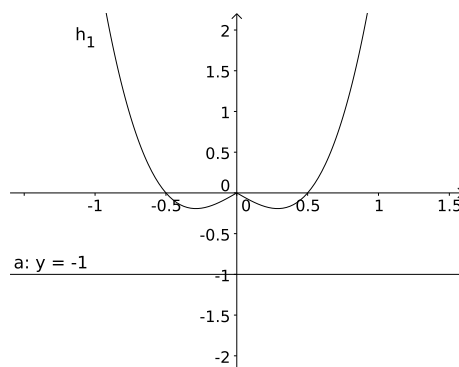


Figura 6.6: Risoluzione grafica dell'Esercizio 12.

7

Coniche

7.1 Soluzioni degli esercizi proposti

1. Centro $C(3, 4)$ e raggio $r = 6$.
2. $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$
3. $x^2 + y^2 - (37/4)x - 10y + 21 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$
5. Tangenti condotte da P : $y = (\sqrt{3}/3)x - 4\sqrt{3}$ e $y = -(\sqrt{3}/3)x + 4\sqrt{3}$
Tangenti condotte da Q : $y = (5/12)x - 6$ e $x = 0$
6. Due rettangoli, $ABCD$ e $A'B'C'D'$, verificano la condizione:

$$A\left(\frac{1 - \sqrt{31}}{8}, \frac{1 + \sqrt{31}}{8}\right) \quad B\left(\frac{\sqrt{31} - 1}{8}, \frac{1 + \sqrt{31}}{8}\right) \quad C\left(\frac{\sqrt{31} - 1}{8}, -\frac{1 + \sqrt{31}}{8}\right) \quad D\left(\frac{1 - \sqrt{31}}{8}, -\frac{1 + \sqrt{31}}{8}\right)$$

$$A'\left(-\frac{1 + \sqrt{31}}{8}, \frac{\sqrt{31} - 1}{8}\right) \quad B'\left(1 + \frac{\sqrt{31}}{8}, \frac{\sqrt{31} - 1}{8}\right) \quad C'\left(\frac{\sqrt{31} + 1}{8}, \frac{1 - \sqrt{31}}{8}\right) \quad D'\left(-\frac{1 + \sqrt{31}}{8}, \frac{1 - \sqrt{31}}{8}\right)$$

7. Centro $C(2, -2)$ e raggio $r = \sqrt{10}$.
8. $(x - 8)^2/36 + (y - 1)^2/20 = 1$
9. Equazioni rette tangenti:

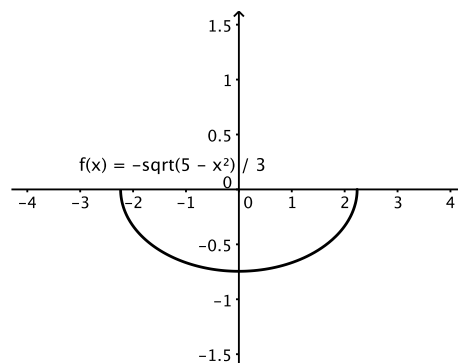
$$y = \frac{2\sqrt{63}}{63}x - \frac{8\sqrt{63}}{63} \quad y = -\frac{2\sqrt{63}}{63}x + \frac{8\sqrt{63}}{63}$$

10.

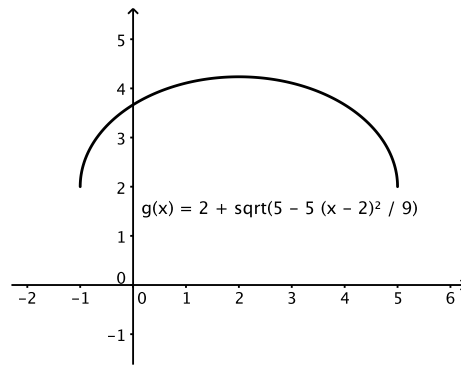
$$x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{2} = 1$$

Centro $C(1, 2)$, vertici $A(3, 2)$, $A'(-1, 2)$, $B(2 + \sqrt{2}, 1)$, $B'(2 - \sqrt{2}, 1)$ e fuochi $F(1 + \sqrt{2}, 2)$, $F'(1 - \sqrt{2}, 2)$.

11. (a) $-5 < q < 5$; (b) $q = \pm 5$; (c) $q < -5 \vee q > 5$
12. (a) $y = -(\sqrt{5 - x^2})/3$



(b) $y = 2 + \sqrt{5 - 5(x - 2)^2/9}$



13. Il luogo geometrico descritto è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - x = 0$.
14. (a) $k = 4$; (b) $k = 101/2$; (c) $k = 29$.
15. $x^2/100 + y^2/36 = 1$, $P(-112/13, -198/65)$, $Q(8, 18/5)$
16. (a) $q < -9/2 \vee q > 9/2$; (b) $q = \pm 9/2$; (c) $-9/2 < q < 9/2$.
17. (a) $k = \pm 2$; (b) $k < -2 \vee k > 2$; (c) $k - 2 < k < -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} < k < 2$.
18. $3x + 20y - 25 = 0$

8 Funzioni esponenziali e logaritmiche

8.1 Soluzioni degli esercizi proposti

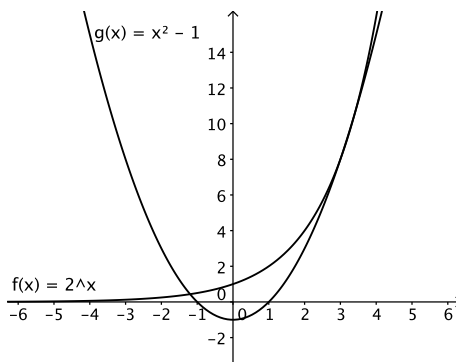
1. $s = 25 \cdot 2^n = 400 \Leftrightarrow n = 4$

2. a) $(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$

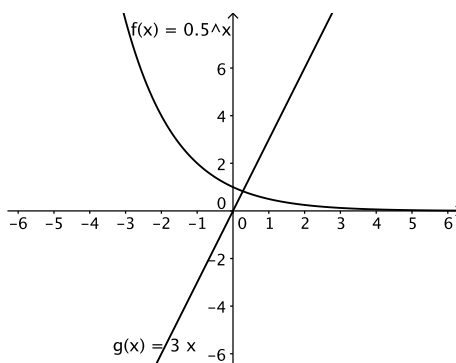
b) $(\sqrt{5})^{-4}$

3. Indichiamo con $f(x)$ la funzione esponenziale a primo membro e con $g(x)$ la funzione polinomiale a secondo membro.

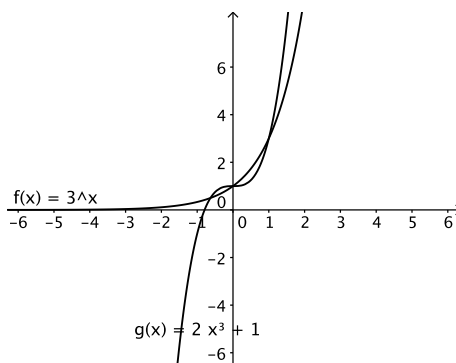
a) $2^x = x^2 - 1$



b) $0.5^x = 3x$



c) $3^x = 2x^3 + 1$



4. a) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \quad \text{Im} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

b) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \quad \text{Im} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$

c) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \vee x \geq 2\} \quad \text{Im} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$

d) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \quad \text{Im} = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\sqrt[3]{2}\}$

- a) $y = 5^{-x}$ decrescente
 b) $y = 0.3^{x-1}$ decrescente
 5. c) $y = 9^x$ crescente
 d) $y = -\log_2 3x$ decrescente
 e) $y = \log_{0.3} x$ decrescente
 f) $y = -\ln(-x)$ crescente
- a) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ b) $\log_{1/3} \frac{1}{27} = 3$
 6. c) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ d) $\log_x x^2 = 2$
 e) $\log_{1/2} 0.25 = 2$ f) $\log_{\sqrt{3}} 243 = 10$
- a) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ b) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1/2\}$
 7. c) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ d) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee x > 2\}$
 e) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ f) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 0 \vee x > 2\}$
8. La funzione del punto b) non è invertibile globalmente, ma lo è su $(0, +\infty)$ o su $(-\infty, 0)$.
 a) $y = 2 + \log_3 x$ b) $y = \sqrt{-3 + \log_5 x}$ oppure $y = -\sqrt{-3 + \log_5 x}$
 c) $y = 8^{x+5}$ d) $y = e^{x-2}$
- a) $x = -1/2 \vee x = 1/8$ b) $x = 2$
 9. c) $x \geq 3$ d) \emptyset
 e) $x = 0$ f) $x = 3$
- a) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, soluzione: $x = (-5 + \sqrt{25 + 12e^2})/6$
 10. b) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$, soluzione: $x = 3$
 c) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x < \ln 7\}$, soluzione: $x = 2$
 d) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2/3\}$, soluzione: $x = 2$
- a) $x > -6$ b) $x < -1$
 11. c) $x < 0 \vee x > 2$ d) $x < 1$
 e) $0 < x < 1$
- a) $x < 1 \vee x > 2$ b) $1 < x < 3$
 12. c) $2 + e^{-1} < x < 2 + e^{2+\sqrt{2}}$ d) $(-9 + \sqrt{61})/2 < x < 2$
 e) $(1 - \sqrt{29})/2 \leq x < -2 \vee 2 < x \leq (1 - \sqrt{21})/2 \vee$
 $(1 + \sqrt{21})/2 \leq x < 3 \vee 3 < x \leq (1 + \sqrt{29})/2$

13.

$$f(x) = \frac{5^x}{5^{2x} - 1}$$

Il dominio di $f(x)$ è $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

$$\frac{5^x}{5^{2x} - 1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \log_5 2$$

Proviamo adesso che la funzione è dispari mostrando che $f(-x) = -f(x)$:

$$f(-x) = \frac{5^{-x}}{5^{-2x} - 1} = \frac{1}{5^x} \frac{1}{1/5^{2x} - 1} = \frac{5^{2x}}{5^x(1 - 5^{2x})} = \frac{5^x}{1 - 5^{2x}} = -f(x)$$

14. a) $x > 1/3$ b) $x \neq 0$
 c) $\mathbb{R} - \{1\}$ d) $x > -2$

9

Funzioni goniometriche

9.1 Soluzioni degli esercizi proposti

1. $\sin x = \sqrt{95}/12$
2. $\cos x = -\sqrt{7}/4$
3. $\sin x = 2\sqrt{5}/5$ e $\cos x = \sqrt{5}/5$
4.
 - a) $T = 2\pi$
 - b) $T = 2\pi/(1/3) = 6\pi$
 - c) $T = 2\pi$
 - d) $T = \pi/2$
 - e) $T = 2\pi$
 - f) $T = 2\pi/(2/5) = 5\pi$
 - g) $T = 2\pi/3$
 - h) $T = \pi/2$
5.
 - a) $x = \pi/4 + 2k\pi \quad \vee \quad x = 3\pi/4 + 2k\pi$
 - b) $x = 5\pi/6 + 2k\pi \quad \vee \quad x = 7\pi/6 + 2k\pi$
 - c) $x = 2\pi/3 + k\pi$
 - d) $2k\pi \leq x < \pi/4 + 2k\pi \quad \vee \quad 3\pi/4 + 2k\pi < x \leq 2(k+1)\pi$
 - e) $-\pi/6 + 2k\pi \leq x \leq \pi/6 + 2k\pi$
 - f) $x > \pi/4 + k\pi$
6.
 - a) $x = 7\pi/12 + k\pi \quad \vee \quad x = 11\pi/12 + k\pi$
 - b) $x = 9\pi/4 + 6k\pi \quad \vee \quad x = 15\pi/4 + 6k\pi$
 - c) $x = 5\pi/12 + k\pi/2$
 - d) $2k\pi/3 \leq x \leq 7\pi/18 + 2k\pi/3 \quad \vee \quad 11\pi/18 + 2k\pi/3 \leq x \leq 2(k+1)\pi/3$
 - e) $\pi/6 + k\pi \leq x \leq 5\pi/6 + k\pi$
 - f) $x < 3\pi/16 + k\pi/4$
 - g) $x = 11\pi/12 + 2k\pi \quad \vee \quad x = 17\pi/12 + 2k\pi$
 - h) $x = 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi/3 + 2k\pi$
 - i) $x = -\pi/4 + k\pi$
 - l) $x = 2\pi/3 + k\pi$
7.
 - a) $x = \pi/12 + k\pi \quad \vee \quad x = 5\pi/12 + k\pi$
 - b) $x = \pi/6 + k\pi \quad \vee \quad x = 5\pi/6 + k\pi$
 - c) $x = \pi/6 + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi + 2k\pi$
 - d) $x = \pi/2 + 2k\pi \quad \vee \quad x = 2k\pi$
 - e) $x = k\pi \quad \vee \quad x = \pi/6 + k\pi \quad \vee \quad x = 5\pi/6 + k\pi$
 - f) $x = k\pi, k \neq 0$
 - g) $x = \pi/4 + k\pi$
 - h) $x = \pi/4 + k\pi$
 - i) $x = k\pi/2$
 - l) $x = \pi/3 + k\pi/2$

- a) $\pi/4 + k\pi \leq x \leq 3\pi/4 + k\pi$
b) $\pi/3 + k\pi \leq x \leq 2\pi/3 + k\pi$
c) $2k\pi \leq x < \pi/6 + 2k\pi \quad \vee \quad 5\pi/6 + 2k\pi \leq x < 2(k+1)\pi$
d) $2k\pi \leq x < \pi/6 + 2k\pi \quad \vee \quad \pi/2 + 2k\pi < x < 5\pi/6 + 2k\pi$
 $\quad \vee \quad 3\pi/2 + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi$
8. e) $-\pi/2 + 2k\pi \leq x \leq \pi/2 + 2k\pi$
f) $-\pi/6 + k\pi \leq x \leq \pi/6 + k\pi$
g) $2k\pi \leq x < \pi/2 + 2k\pi \quad \vee \quad 7\pi/6 + 2k\pi < x < 3\pi/2 + 2k\pi$
 $\quad \vee \quad 11\pi/6 + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi$
h) $-\pi/2 + 2k\pi \leq x \leq \pi/2 + 2k\pi \quad \wedge \quad x \neq 0$
i) $\pi/2 + 2k\pi < x < 3\pi/2 + 2k\pi$
l) $2k\pi \leq x < \pi/6 + 2k\pi \quad \vee \quad 5\pi/6 + 2k\pi < x \leq 2(k+1)\pi$

10 Calcolo combinatorio e probabilità

10.1 Soluzioni degli esercizi proposti

1. $6^3 = 216$

2. $7! = 5040$

3. $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

4. $4! = 24$

5. $n(n-3)/2$ (vedi anche Capitolo 2 del libro)

6.

$$(2x+1)^5 = 32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1$$

$$(x-3)^4 = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$$

$$(1+x)^8 = 1 + 8x + 28x^2 + 56x^3 + 70x^4 + 56x^5 + 28x^6 + 8x^7 + x^8$$

7. 567

8. 180

9. (a) 8

(b) 32

(c) 33

(d) 36

10. (a) $6^4 = 1296$

(b) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

(c) $6^3 = 216$

11. 205

12. $n = 11$

13. 48

14. $53/512$

15. $4/9$

16. $4/5$

17. A e B non sono incompatibili

18. $P(B) = 1/3$

19. (a) $61/125$

(b) $12/125$

20. $149/198$

21. $p_n = (n^2 - 1)/(2n^2 - n)$

22. (a) $5/72$
 (b) $7/72$.

23. (a) $8/27$
 (b) $4/9$
 (c) $7/27$

24. (a) $7/12$
 (b) $3/5$
 (c) $21/40$
 (d) $25/37$
 (e) $13/36$
 (f) $12/13$

25. $47/128$

26. (a) $1/114$
 (b) $49/285$
 (c) $137/228$

27. Le possibili mani iniziali indipendentemente dal seme delle carte sono 91. Se invece consideriamo i semi sono 1326.

28. (a) 210
 (b) 126
 (c) 100

- 29.

$$\binom{500}{10} \left(\frac{1}{20}\right)^{10} \left(\frac{19}{20}\right)^{490}$$

30. (a) $144/169$
 (b) $(1/10)^{40}$
 (c)

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{40} + \binom{40}{1} \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{9}{10}\right)^{39} + \binom{40}{2} \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^{38} + \binom{40}{3} \left(\frac{1}{10}\right)^3 \left(\frac{9}{10}\right)^{37}$$

11.1 Soluzioni batteria 1

1. Indichiamo con a la cifra delle decine e con b quella delle unità dei numeri che stiamo cercando; si ha allora

$$10a + b = a^2 + b^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 - 10a + b^2 - b + 1 = 0$$

L'ultima espressione, vista come equazione di secondo grado in a , deve avere, affinché a sia un intero positivo, discriminante uguale ad un quadrato perfetto; il discriminante vale

$$\Delta/4 = 25 - b^2 + b - 1 = 24 - b(b - 1)$$

quindi b deve valere 5 da cui $a = 3$ oppure $a = 7$. I due numeri cercati sono allora 35 e 75.

2.

$$-\frac{11}{9} < -\frac{7}{6} < e^{-3} < 1 < \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} < 1.7 < \sqrt{6}$$

3. La funzione definita in \mathbb{Q} a valori in \mathbb{Q}

$$f : x \rightarrow \frac{2x - 1}{2}$$

è iniettiva e surgettiva, quindi biunivoca. Si ha $f(1) = 1/2$, $f(-1) = -3/2$, $f(2) = 3/2$.

4. 16000

5. a)

$$\left(\frac{7}{9}\right)^5$$

b)

$$\left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{2}{9}\right)^3 \left(\frac{3}{9}\right)^2$$

6. $y = 2(1 + \sqrt{2})x - 2(1 + \sqrt{2})$ e $y = 2(1 - \sqrt{2})x - 2(1 - \sqrt{2})$

7.

$$-\frac{3}{2} < x \leq \frac{2 - \sqrt{14}}{2} \quad \vee \quad \frac{3}{2} < x \leq \frac{2 + \sqrt{14}}{2}$$

8. L'equazione

$$3 \sin x = 4x^2 + 2x + 4$$

non ammette soluzioni. La parabola $y = 4x^2 + 2x + 4$ ha il vertice in $V(-1/4, 15/4)$ e concavità rivolta verso l'alto quindi il suo minimo vale $15/4$; la funzione $y = 3 \sin x$ ha valore massimo 3 pertanto le curve grafici delle due funzioni non possono intersecarsi.

11.2 Soluzioni batteria 2

1. $3^5 = 243$

2. L'applicazione non è iniettiva (posso sempre trovare due circonferenze distinte con lo stesso centro), ma è surgettiva (dato un qualunque punto del piano posso costruire una circonferenza centrata in quel punto).

3. $x/y = 5/4$

4. $f \circ f : x \xrightarrow{f} 2 - x \xrightarrow{f} 2 - (2 - x) = 2 - 2 + x = x$

5. $x < 3 \vee -2 < x < 2 \vee (12/5) < x < 3$

6.

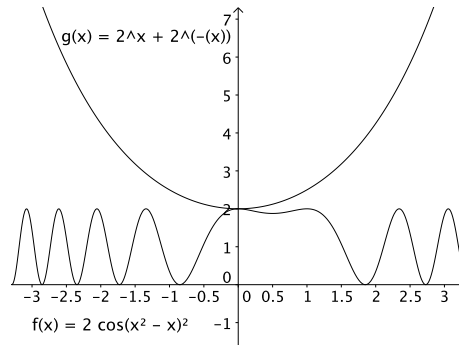
$$p_n = \frac{4n}{9n - 3}$$

Al crescere di n , p_n diminuisce.

7. L'equazione

$$2 \cos^2(x^2 - x) = 2^x + 2^{-x}$$

ammette l'unica soluzione $x = 0$ (vedi figura sottostante).



8. $43/216$

11.3 Soluzioni batteria 3

1. $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/3}$, quindi $N(24) = N_0 \cdot 2^{24/3} = 256 N_0$

2. Le funzioni di A in B sono n^p ; di queste $n(n-1) \dots (n-p+1)$ sono iniettive.

3. $x_1 x_2 = -a^2$

4. a) La somma dei loro quadrati è 41

b) La somma dei loro reciproci è $-1/20$

5. $-1 \leq x \leq 4 - \sqrt{15}$

6. $P(M|pos) = 90/1085$

7. \emptyset

8. $x = 2$

11.4 Soluzioni batteria 4

1. Il numero massimo di marciatori che conclude la gara è 23, il numero minimo è 8.
2. Date le due applicazioni di \mathbb{N} in \mathbb{N}

$$y = f(x) = x + 1 \quad \text{e} \quad z = g(y) = y^2$$

l'applicazione $g \circ f$ associa al numero naturale x il numero naturale $(x + 1)^2$:

$$(g \circ f)(x) = (x + 1)^2$$

Tale applicazione è iniettiva, ma non surgettiva (ad esempio il numero naturale 3 non ha una controimmagine in \mathbb{N}).

3. Indicati con β e γ gli angoli \hat{B} e \hat{C} rispettivamente, l'angolo $B\hat{D}C$ misura

$$180^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$$

ma si ha $\beta + \gamma = 180^\circ - \hat{A} = 100^\circ$, quindi

$$B\hat{D}C = 180^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 180^\circ - \frac{100^\circ}{2} = 130^\circ$$

4. \emptyset

5. Risolvi la seguente disequazione

$$|5x - 2| \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leq 5x - 2 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq 5x \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{6}{5}$$

6. Indichiamo con $P(M)$ la probabilità di essere un maschio, con $P(F)$ quella di essere una femmina e con $P(> 1.80)$ la probabilità di essere più alto di 1.80 m:

$$P(M) = 40\% \quad P(F) = 60\% \quad P(> 1.80|M) = 10\% \quad P(> 1.80|F) = 4\%$$

a)

$$P(> 1.80) = P(M)P(> 1.80|M) + P(F)P(> 1.80|F) = 6.4\%$$

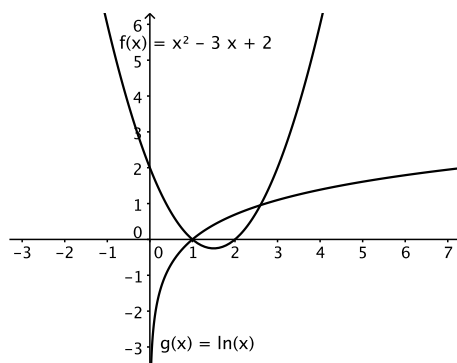
b)

$$P(F|> 1.80) = \frac{P(F)P(> 1.80|F)}{P(> 1.80)} = 37.5\%$$

7. L'equazione da risolvere è equivalente a

$$f(x) = g(x)$$

dove $f(x) = x^2 - 3x + 2$ e $g(x) = \ln x$.



8. Affinché l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ non abbia soluzioni razionali il discriminante Δ non deve essere un quadrato perfetto, in modo che $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{Q}$. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che

$$\Delta = b^2 - 4ac = q^2$$

con q numero intero necessariamente dispari, dato che b^2 è dispari (b è dispari) e $4ac$ è pari (contiene un fattore 4). Allora $b^2 - q^2 = 4ac$ da cui

$$(b + q)(b - q) = 4ac$$

I fattori $(b + q)$ e $(b - q)$ sono pari (differenza di due numeri dispari) e, poiché il loro prodotto è uguale a $4ac = (2a)(2c)$ (ricorda che a e c sono dispari per ipotesi) deve essere

$$\begin{cases} b + q = 2a \\ b - q = 2c \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} b - q = 2a \\ b + q = 2c \end{cases}$$

In entrambi i casi, sommando membro a membro si ottiene

$$2b = 2a + 2c \quad \Leftrightarrow \quad b = a + c$$

ovvero b è somma di due interi dispari (quindi è pari), e questo contraddice l'ipotesi.

Un'altra possibile dimostrazione è la seguente. Supponiamo per assurdo che l'equazione ammetta una soluzione razionale p/q , con p e q primi tra loro, allora

$$a \left(\frac{p^2}{q^2} \right) + b \left(\frac{p}{q} \right) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

I numeri p e q possono essere entrambi dispari oppure uno dispari e l'altro pari; esaminando i diversi casi è possibile mostrare che la somma $ap^2 + bpq + cq^2$ non può annullarsi.

11.5 Soluzioni batteria 5

1. Sia $\triangle ABC$ un triangolo rettangolo retto in A ; supponiamo che il quadrato $DEFG$ sia inscritto con il vertice D sul cateto AB , il vertice G sul cateto AC ed il lato EF giacente sull'ipotenusa BC . Sia l il lato del quadrato. I triangoli $\triangle DEB$ e $\triangle GAC$ sono simili e si può dedurre che

$$\overline{EB} = \frac{3}{4}l$$

Stesso discorso per $\triangle GFC$ e $\triangle GAC$ da cui

$$\overline{CF} = \frac{4}{3}l$$

L'ipotenusa BC , lunga 35 cm (si trova utilizzando il teorema di Pitagora), è funzione di l

$$\overline{BC} = \frac{4}{3}l + l + \frac{3}{4}l = \frac{37}{12}l$$

quindi

$$35 = \frac{37}{12}l$$

da cui

$$l = \frac{420}{37}$$

L'area del quadrato è allora

$$\mathcal{A} = l^2 = \left(\frac{420}{37} \right)^2$$

2. Il volume della scatola 1, quella venduta a 1.50 euro vale

$$V_1 = a b c$$

dove a , b e c sono le dimensioni del parallelepipedo rettangolo. La scatola 2 è un parallelepipedo rettangolo con dimensioni doppie, quindi il suo volume è

$$V_2 = (2a)(2b)(2c) = 8abc = 8V_1$$

Se i prezzi di vendita fossero proporzionali ai contenuti la scatola 2 dovrebbe costare 8 volte di più, ovvero 12 euro; poiché è venduta a 10.80 euro, viene praticato un sconto pari a

$$\frac{12 - 10.80}{12} = \frac{1.20}{12} = \frac{1}{10} = 10\%$$

3. La funzione in esame è

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ pari} \\ (n+1)/2, & n \text{ dispari} \end{cases}$$

e si ha, ad esempio,

$$f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \quad f(2) = 1 \quad f(3) = 2 \quad f(4) = 2$$

La funzione f è surgettiva ($f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$), ma non iniettiva.

4. La regione di piano individuata dalle seguenti condizioni

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq |2x - 2| \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

è formata da due triangoli rettangoli di aree rispettivamente 1 e 4, quindi l'area totale vale 5. Se si aggiunge la condizione $y \leq 1$ tale area si dimezza.

- 5.

$$a) x < -2 \quad \vee \quad 1 < x < 2$$

$$b) \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < 1$$

6. a) La probabilità che un pezzo sia difettoso è 3.7 %.
b) Supponendo di aver estratto un pezzo difettoso, la probabilità che quel pezzo sia stato prodotto dalla macchina H_1 è circa 40.5 %.

7. L'equazione

$$|x - 3|^{\left(\frac{x^2 - 8x + 15}{x - 2}\right)} = 1$$

contiene l'incognita sia nella base che nell'esponente. Essa ha soluzione se la base vale 1 e l'esponente è definito oppure se la base è definita (ovvero maggiore di zero) e l'esponente vale zero. Si verifica il primo caso se $x = 4$; se $x = 2$ la base vale 1, ma l'esponente non è definito. Si verifica il secondo caso se $x = 5$; se $x = 3$ l'esponente si annulla, ma si annulla anche la base. In conclusione l'equazione ha due soluzioni: $x = 4$ e $x = 5$.

8. La seguente disequazione

$$-|y| + x - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geq 1$$

è definita quando $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$, ovvero sull'intero piano cartesiano eccetto l'interno della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Con un semplice passaggio si ottiene

$$-|y| + x - 1 \geq \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

quindi la disequazione ammette soluzioni se e solo se

$$-|y| + x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |y| \leq x - 1$$

ovvero se (x, y) è un punto del piano cartesiano appartenente ad una regione infinita appartenente al I e IV quadrante e delimitata dalle rette $y = x - 1$ e $y = 1 - x$ che si incontrano nel punto $(1, 0)$. Risolviamo la disequazione in questa regione:

$$-|y| + x - 1 \geq \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad (-|y| + x - 1)^2 \geq x^2 + y^2 - 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$|y| - x - x|y| + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (|y| + 1)(1 - x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 1$$

Quindi l'unico punto della regione che soddisfa la disequazione è il punto di intersezione delle due rette ovvero $(1, 0)$.