

Appendice sul calcolo differenziale

Questa appendice passa in rassegna gli strumenti matematici utilizzati nel testo.¹ Viene data particolare enfasi alla massimizzazione vincolata e non vincolata.

A.1 Funzioni

Una *funzione* è una legge che associa a ogni elemento di un insieme uno (e un solo) elemento di un altro insieme. In questo paragrafo inizieremo con l'analisi delle *funzioni in una variabile* per poi studiare le *funzioni in più variabili*.

Funzioni in una variabile

Consideriamo una variabile x che appartenga a un insieme X . Per esempio, l'insieme X può essere l'insieme dei numeri reali non-negativi. Una funzione f associa agli elementi dell'insieme X elementi di un insieme Y , che può essere lo stesso insieme X . La funzione f è una *mappa* da X a Y e questo concetto viene indicato con $f : X \rightarrow Y$. L'insieme X è chiamato il *dominio* della funzione, mentre Y rappresenta il *codominio* della funzione. Per rappresentare la legge che associa a un elemento di X un elemento di Y , si scrive $y = f(x)$.

Consideriamo in particolare le funzioni di numeri reali. Molto spesso queste funzioni associano a un numero reale ($X = \mathbb{R}$) un altro numero reale ($Y = \mathbb{R}$). Tuttavia, a volte il dominio della funzione è un intervallo di numeri reali. Per esempio, potremmo studiare una funzione definita sull'insieme di numeri reali compresi tra 0 e 1; questo intervallo è indicato con $[0, 1]$ se comprende i valori 0 e 1, oppure con $(0, 1)$ se gli estremi dell'intervallo non sono inclusi nell'insieme. Si possono anche utilizzare una parentesi tonda e una quadra, $(0, 1]$, per indicare l'intervallo di numeri reali che sono strettamente maggiori di zero e minori o uguali a uno. Usando l'espressione $x \in (0, 1]$, intendiamo dire che la variabile x può assumere solo valori maggiori di zero e minori o uguali a uno.

Alcuni esempi di funzioni in una variabile sono:

- funzione identità: $f(x) = x \quad \forall x \in X$
- funzione nulla: $f(x) = 0 \quad \forall x \in X$
- funzione radice quadrata: $f(x) = \sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$
- funzione iperbole: $f(x) = 1/x \quad \forall x \neq 0$

Questi esempi rappresentano funzioni *in forma esplicita* in quanto sono scritti nella forma $y = f(x)$. Una funzione è *in forma implicita* quando è scritta nella forma $g(x, y) = 0$. Per esempio $x^2 + y^2 - 1 = 0$ definisce implicitamente y in funzione

¹ Ethan Ligon è co-autore di questa appendice.

di x . Una funzione esplicita f può essere sempre scritta in forma implicita usando l'espressione $g(x, y) = y - f(x)$. Non è invece possibile esplicitare tutte le funzioni implicite. Per esempio, la funzione implicita $g(x, y) = ay^5 + by^4 + cy^3 + dy^2 + ey + x = 0$ generalmente non può essere resa in forma esplicita.

Funzioni in più variabili

Una funzione può dipendere da più di una variabile. Un esempio è $y = f(x_1, x_2)$, dove $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$. In questo caso il dominio della funzione è dato da $X = X_1 \times X_2$ dove il simbolo \times indica il prodotto cartesiano tra due insiemi. Per esempio, l'insieme $X = [0, 1] \times [0, 1]$ contiene tutte le coppie di numeri reali compresi tra zero e uno, estremi inclusi. La funzione f associa agli elementi del dominio, cioè dell'insieme $X = X_1 \times X_2$, gli elementi del codominio, cioè dell'insieme Y . Questo significa che f è una mappa da X a Y , e questo si indica nella forma $f : X \rightarrow Y$ oppure $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$.

Un esempio è la formula che esprime l'indice di massa corporea (BMI, *body mass index*), che di fatto è una funzione di peso (in chilogrammi) e altezza (in metri):

$$\text{BMI} = \text{peso}/(\text{altezza})^2$$

Se la variabile z misura il BMI, w il peso e h l'altezza:

$$z = f(w, h) = \frac{w}{h^2}$$

Altri esempi di funzioni in due o più variabili sono:

- la funzione Cobb-Douglas in due variabili: $y = f(K, L) = 3L^{1/3}K^{2/3}$;
- la *funzione Cobb-Douglas in due variabili e due parametri*: $y = f(K, L) = AL^\alpha K^{1-\alpha}$, dove A e α sono parametri (rappresentano cioè numeri sconosciuti e non variabili). L'esempio precedente è un caso particolare, dove $A = 3$ e $\alpha = 1/3$;
- la funzione Cobb-Douglas in n variabili: $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$.

A.2 Proprietà delle funzioni

Nel testo facciamo spesso riferimento ad alcune importanti proprietà che le funzioni possono possedere. In questo paragrafo inizieremo a trattare le proprietà più utilizzate, e cioè la *monotonia*, la *continuità*, la *concavità/concavità* e l'*omogeneità*. Dopo aver passato in rassegna queste proprietà, elencheremo tre proprietà della funzione logaritmica che vengono spesso usate.

Monotonia

Si definisce *monotona* una funzione che è sempre crescente o sempre decrescente. Per esempio, l'identità $f(x) = x$ è sempre crescente. Questo significa che al crescere di x cresce il valore della funzione $f(x)$. Alcune funzioni sono monotone solo in determinate condizioni; per esempio, la funzione $f(x) = 1/x$ è sempre decrescente quando x è positivo. La funzione $f(x) = x^2$ non è monotona: decresce quando x è negativo, mentre cresce quando x è positivo.

Continuità

Una funzione si dice *continua* se nel disegnarne il grafico “non si stacca mai la penna dal foglio”. Una funzione è continua *in un punto* se non ci sono salti nelle vicinanze di quel punto; condizione sufficiente affinché una funzione sia continua in un punto a è che

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

che ci dice che il limite della funzione $f(x)$ è $f(a)$ all'avvicinarsi di x ad a .²

Concavità e convessità

Gli economisti fanno abbondante uso delle proprietà di concavità/convessità. Una funzione f si definisce *concava* su una regione A se il grafico della funzione $f(x)$ sta sempre sopra al segmento che congiunge due punti qualsiasi del grafico definito su A . Per esempio, nel grafico (a) della Figura A.1 si considera una funzione f con dominio X . All'interno di questo dominio, scegliamo un sottoinsieme A , e consideriamo due punti x e x' appartenenti ad A . f associa a x e x' le rispettive immagini $f(x)$ e $f(x')$. Il segmento che congiunge i punti, $(x, f(x))$ e $(x', f(x'))$ sta sotto il grafico di $f(x)$ per tutte le x comprese tra x e x' .

Questo criterio illustra l'intuizione della concavità per le funzioni in una variabile. Esiste però un altro criterio, utilizzabile per le funzioni in più variabili oppure per quelle funzioni che non possono essere disegnate in modo così semplice. Per illustrare questo procedimento, consideriamo la concavità di una funzione in due variabili (x, y) , $f: X \times Y \rightarrow Z$. Anche in questo caso, consideriamo il sottoinsieme A del dominio di f , $X \times Y$, e scegliamo due punti del dominio, (x, y) e (x', y') . La funzione f si dice concava in A se per tutti i valori di θ tali che $0 < \theta < 1$ e per tutte le coppie (x, y) e (x', y') appartenenti ad A , si ha

$$f(\theta x + (1 - \theta)x', \theta y + (1 - \theta)y') \geq \theta f(x, y) + (1 - \theta)f(x', y') \quad (\text{A.1})$$

L'Equazione A.1 è un'estensione del criterio precedente. Se lasciamo che θ vari tra zero e uno, possiamo ricavare tutti i valori della funzione f nei punti in A (parte sinistra della disuguaglianza), mentre variando θ nella parte destra dell'espressione si traccia un segmento che congiunge i valori della funzione f calcolata nei punti (x, y) e (x', y') . Pertanto questa espressione ci dice che la funzione giace al di sopra del segmento congiungente i due punti.

A volte si distingue tra una funzione debolmente concava e una strettamente concava. Una funzione f si dice *debolmente concava* se soddisfa l'Equazione A.1, mentre si dice *strettamente concava* se soddisfa la condizione

$$f(\theta x + (1 - \theta)x', \theta y + (1 - \theta)y') > \theta f(x, y) + (1 - \theta)f(x', y')$$

² Se una successione infinita tende a un qualche particolare valore, tale valore è il limite della successione. Per esempio, nella successione $(1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$ l'elemento n -esimo della successione è pari a $1/n$, dove n è un numero intero positivo. Al crescere di n il valore di $1/n$ tende a zero, dunque il limite di questa successione è zero (anche se zero non è uno degli elementi della successione).

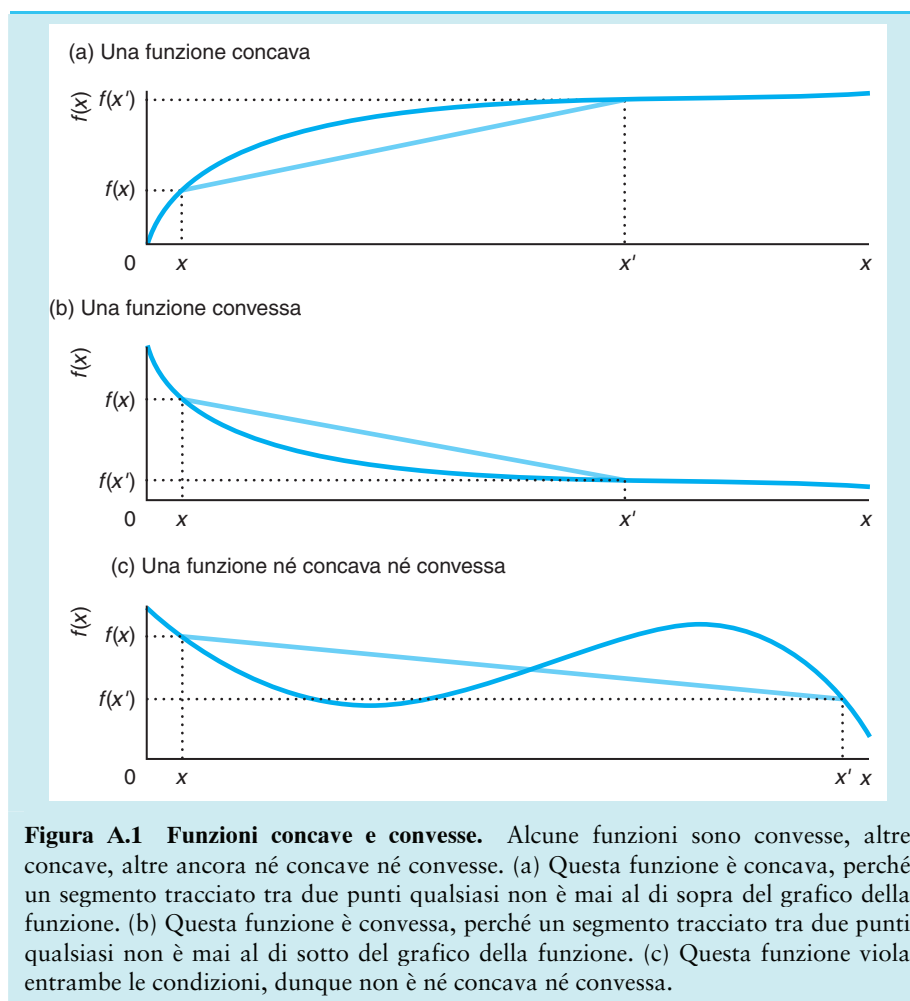


Figura A.1 Funzioni concave e convesse. Alcune funzioni sono convesse, altre concave, altre ancora né concave né convesse. (a) Questa funzione è concava, perché un segmento tracciato tra due punti qualsiasi non è mai al di sopra del grafico della funzione. (b) Questa funzione è convessa, perché un segmento tracciato tra due punti qualsiasi non è mai al di sotto del grafico della funzione. (c) Questa funzione viola entrambe le condizioni, dunque non è né concava né convessa.

Una funzione si dice *convessa* in una regione A se soddisfa la condizione opposta della concavità. Questo significa che il grafico della funzione non sarà mai al di sopra del segmento che congiunge i punti della funzione, come mostra il grafico (b) della Figura A.1. La condizione matematica è la stessa di quella della concavità ma con il segno della disuguaglianza opposto: la funzione f è *debolmente convessa* in A se per tutti i valori di θ tali che $0 < \theta < 1$ e per tutte le coppie (x, y) e (x', y') appartenenti ad A , si ha

$$f(\theta x + (1 - \theta)x', \theta y + (1 - \theta)y') \leq \theta f(x, y) + (1 - \theta)f(x', y')$$

La funzione è *strettamente convessa* se la disuguaglianza è forte.

La funzione $f(x) = x^2$ è strettamente convessa. Per dimostrarlo, prendiamo due punti sulla retta reale x e x' e verifichiamo che vale

$$f(\theta x + (1 - \theta)x') < \theta f(x) + (1 - \theta)f(x')$$

Sostituendo i valori della funzione otteniamo

$$(\theta x + (1 - \theta)x')^2 < \theta x^2 + (1 - \theta)(x')^2$$

cioè

$$\theta^2 x^2 + (1-\theta)^2 (x')^2 + 2\theta(1-\theta)xx' < \theta x^2 + (1-\theta)(x')^2$$

Sistemando i termini,

$$\theta(1-\theta)x^2 + \theta(1-\theta)(x')^2 - 2\theta(1-\theta)xx' > 0$$

$$x^2 + (x')^2 - 2xx' = (x - x')^2 > 0$$

Pertanto questa funzione è strettamente convessa.

Come possiamo vedere nel grafico (c) della Figura A.1, alcune funzioni non sono né concave né convesse. La funzione x^3 non è né concava né convessa in \mathbb{R} : essa è concava per valori negativi di x e convessa per valori positivi di x . Infine, la funzione Cobb-Douglas $f(K,L) = AL^\alpha K^\beta$, dove L e K sono numeri reali non negativi, è concava se $\alpha + \beta \leq 1$.

Funzioni omogenee

Una funzione $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ si dice *omogenea* di grado γ se, $\forall a > 0$,

$$y = f(ax_1, ax_2, ax_3, \dots, ax_n) = a^\gamma f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Supponiamo per esempio che f rappresenti l'output e che $\{x_i\}$ rappresenti l'insieme degli input della produzione. Fissato $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, f ci dice la quantità prodotta dall'impresa,

$$q = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Cosa accade a q se raddoppiamo tutti i valori iniziali degli input, cioè se $a = 2$? Se per ogni insieme di input l'output raddoppia, allora la funzione è omogenea di grado uno. Se invece la quantità prodotta non varia, allora è omogenea di grado zero. Se la quantità prodotta aumenta di quattro volte, f è omogenea di grado due e così via.

Vediamo alcuni esempi.

- La funzione $f(x) = 1$ è omogenea di grado zero, poiché raddoppiando x $f(x)$ non varia.
- La funzione $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$ è omogenea di grado $1/2$, poiché raddoppiando x_1 e x_2 $f(2x_1, 2x_2) = \sqrt{2x_1 + 2x_2} = \sqrt{2}\sqrt{x_1 + x_2} = 2^{1/2}\sqrt{x_1 + x_2}$.
- La funzione $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$ è omogenea di grado uno, poiché $f(2x_1, 2x_2) = \sqrt{(2x_1)(2x_2)} = 2\sqrt{x_1 x_2}$.
- La funzione Cobb-Douglas $f(K, L) = AL^\alpha K^\beta$ è omogenea di grado $\alpha + \beta$, poiché $f(2K, 2L) = A(2L)^\alpha (2K)^\beta = 2^{\alpha+\beta} AL^\alpha K^\beta$.
- Le funzioni $f(x) = x + 1$ e $f(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$ non sono omogenee.

Proprietà del logaritmo

Utilizziamo spesso la funzione logaritmo in questo testo, in quanto possiede una serie di proprietà desiderabili. Per esempio, utilizzando i logaritmi, alcuni problemi moltiplicativi possono essere trasformati in problemi additivi. Utilizziamo sempre il logaritmo naturale di x , che si scrive $\ln x$, dove $x = e^{\ln x}$ per $x > 0$.

Proprietà fondamentali dei logaritmi:

- Il logaritmo di un prodotto è pari alla somma dei logaritmi: $\ln(xz) = \ln x + \ln z$.
- Il logaritmo di una potenza è pari all'esponente della potenza moltiplicato per il logaritmo della base della potenza: $\ln x^b = b \ln x$.

Dalla regola precedente segue che il logaritmo del reciproco di x è pari all'opposto del logaritmo di x : $\ln(1/x) = \ln x^{-1} = -\ln x$.

A.3 Derivate

Vogliamo ora studiare come varia il valore di una funzione al variare del suo argomento. Una possibilità è osservare la pendenza della funzione. Tuttavia di solito ne consideriamo la *derivata*, che di fatto rappresenta la pendenza della funzione in un particolare punto. Per illustrare la differenza tra questi due tipi di misurazione, consideriamo una funzione in una variabile, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

La definizione comune di *pendenza* è il rapporto tra l'incremento di $f(x)$ e l'incremento di x quando ci si sposta da un punto x_1 a un punto x_2 :

$$\text{Pendenza} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Questa definizione di pendenza dipende dal confronto del valore della funzione in due punti diversi, x_1 e x_2 . Solitamente però quello che ci serve è la pendenza di f in un punto.

Per determinare la pendenza in un punto è necessario prima di tutto definire la differenza h tra questi due punti nel modo seguente: $x_2 = x_1 + h$. Sostituendo questa espressione nella formula precedente, otteniamo:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

La derivata della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nel punto $x \in \mathbb{R}$ è

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{A.2})$$

In questo testo utilizziamo due diversi simboli per indicare la derivata di una funzione. In questo paragrafo, e nella maggior parte del testo, indichiamo la derivata utilizzando l'espressione $df(x)/dx$. A volte, per semplicità, ometteremo il riferimento esplicito all'argomento di f , scrivendo quindi la derivata di f in un punto x come df/dx , qualora non emerga alcuna ambiguità.

La derivata ha un'interpretazione grafica. La pendenza di una funzione tra due punti è uguale alla pendenza della retta che congiunge questi due punti. La pendenza di tale retta può essere calcolata utilizzando il valore $\Delta f/\Delta x$. Nella Figura A.2, la pendenza della funzione tra x_1 e x_2 è uguale alla pendenza della retta che congiunge i punti $b = (x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. Ora, fissiamo uno dei due punti, b , e avviciniamo sempre più l'altro punto in modo tale che l'incremento della x , $h = x_2 - x_1$, diventi sempre più piccolo. Se esiste la derivata, anche l'in-

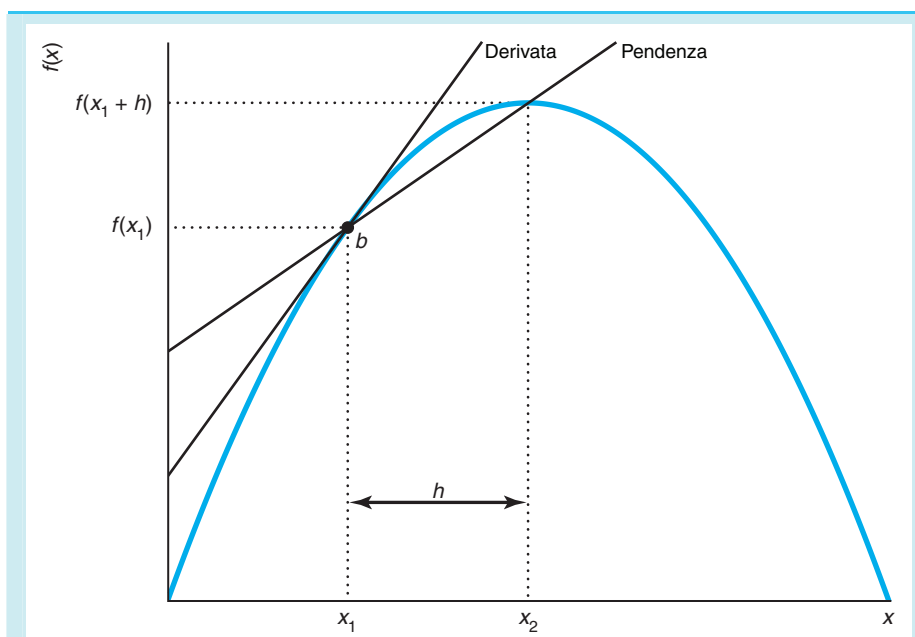


Figura A.2 Derivata e pendenza. La pendenza di una funzione tra x_1 e x_2 è uguale alla pendenza della retta che congiunge i punti $b = (x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. Se fissiamo uno dei due punti, b , e avviciniamo sempre più l'altro punto, l'incremento della x , $h = x_2 - x_1$, diventa sempre più piccolo. Se esiste la derivata, anche l'incremento del valore della funzione, $f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + h) - f(x_1)$, diverrà sempre più piccolo, ma a un tasso diverso rispetto ad h . Il valore limite di questa pendenza è la derivata, che è pari alla pendenza della tangente alla funzione in b .

cremento del valore della funzione, $f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + h) - f(x_1)$, diverrà sempre più piccolo, ma a un tasso diverso rispetto ad h . Il valore limite del rapporto $\Delta f / \Delta x$ sarà la pendenza di un segmento infinitesimo, cioè la pendenza della funzione in un punto. Il valore limite di questa pendenza è la derivata, che è pari alla pendenza della tangente alla funzione in b .

Se $df(x)/dx$ è positivo, la funzione è *crescente* in x . Questo significa che all'aumentare di x aumenta anche il valore della funzione. Allo stesso modo, se $df(x)/dx$ è negativo, la funzione è *decrescente* in x .

Un problema che può sorgere quando si usano le derivate anziché le pendenze è che la derivata di una funzione potrebbe non essere definita, in quanto il limite nell'Equazione A.2 non esiste. Le funzioni discontinue in alcuni punti non hanno derivata in questi punti; per esempio, la derivata della funzione $1/x$ non esiste nel punto $x = 0$. Inoltre non esiste la derivata in $x = 0$ della funzione $|x|$ nonostante questa sia continua in $x = 0$.

Regole per il calcolo delle derivate

In questo testo utilizzeremo spesso alcune regole per il calcolo della derivata di una funzione.

1. *Derivata di una somma:* se una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ può essere scritta come somma di due funzioni, cioè $f(x) = g(x) + h(x)$, allora

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} + \frac{dh(x)}{dx}$$

Questo significa che la derivata della somma è uguale alla somma delle derivate.

2. *Derivata di un prodotto*: se una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ può essere scritta come il prodotto di due funzioni, cioè $f(x) = g(x)h(x)$, dove g e h sono entrambe derivabili in x , allora

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx}h(x) + g(x)\frac{dh(x)}{dx}$$

Un caso particolare si ha quando $g(x)$ è una costante, cioè $g(x) = b$. Infatti $dg(x)/dx = 0$ e, in base alla regola della derivata di un prodotto,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{db}{dx}h(x) + b\frac{dh(x)}{dx} = b\frac{dh(x)}{dx}$$

3. *Derivata di una potenza*: se $f(x) = ax^b$, allora la derivata di f in x , ammesso che esista, è:

$$\frac{df(x)}{dx} = abx^{b-1}$$

Per esempio, utilizzando questa regola, si può dimostrare che $d(bx^2)/dx = 2bx$. Applicando sia questo risultato che la regola di derivazione di un prodotto, possiamo ottenere la derivata $d(bx^3)/dx$:

$$\frac{dbx^3}{dx} = x\frac{dbx^2}{dx} + \frac{dx}{dx}bx^2 = x(2bx) + bx^2 = 3bx^2$$

Più in generale,

$$\frac{dbx^n}{dx} = nbx^{n-1}$$

4. *Derivata di un polinomio*: un polinomio di grado n è una funzione della forma:

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

dove n è un numero intero non negativo. Il grado del polinomio è dato dall'esponente maggiore, n . Utilizzando più volte la regola di derivazione di una potenza, la derivata del polinomio è

$$\frac{df(x)}{dx} = b_1 + 2b_2x + \dots + nb_nx^{n-1}$$

5. *Derivata del reciproco di una funzione*: utilizzando sia la regola di derivazione di una potenza che la regola di derivazione del prodotto di funzioni, si può dimostrare che se $f(x) = 1/g(x)$, allora

$$\frac{d\left[\frac{1}{g(x)}\right]}{dx} = -\frac{\frac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2}$$

6. *Derivata di un quoziente*: utilizzando la regola della derivata del reciproco di una funzione e la regola di derivazione di un prodotto, si può dimostrare che se $f(x) = g(x)/h(x)$, allora

$$\frac{d\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]}{dx} = \frac{\frac{dg(x)}{dx}h(x) - g(x)\frac{dh(x)}{dx}}{[h(x)]^2}$$

7. *Derivata di una funzione composta*: utilizzando le regole precedenti, possiamo calcolare le derivate di funzioni come $f(x) = g(h(x))$:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(h(x))}{dx} = \frac{dg(h(x))}{dh(x)} \frac{dh(x)}{dx},$$

nell'ipotesi in cui h sia derivabile in x e g sia derivabile in $h(x)$. Per esempio, consideriamo $h(x) = x^2$ e $g(z) = 2 + z^2$, per cui $f(x) = g(h(x)) = 2 + x^4$. Derivando direttamente, sappiamo che $df(x)/dx = 4x^3$. Possiamo ottenere lo stesso risultato utilizzando la regola di derivazione di una funzione composta. In primo luogo utilizziamo la regola di derivazione del prodotto per dimostrare che $dg(z)/dz = 2z$ e che $dh(x)/dx = 2x$. Poi sostituiamo $h(x)$ a z nell'espressione $dg(z)/dz$, da cui quindi otteniamo $dg(h(x))/dh(x)$ e applicando la regola di derivazione di una funzione composta otteniamo:

$$\frac{dg(h(x))}{dx} = \frac{d(2 + h(x))}{dh(x)} \frac{dh(x)}{dx} = (2x^2)(2x) = 4x^3$$

8. *Derivata di una funzione esponenziale*: una funzione esponenziale è una funzione che può essere scritta nella forma $f(x) = a^x$, dove un numero a è elevato alla potenza x . Se $a = e$, per ogni funzione derivabile $g(x)$ si ha che

$$\frac{de^{g(x)}}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} e^{g(x)}$$

Un caso particolare è il seguente:

$$\frac{dae^{bx}}{dx} = abe^{bx}$$

Se $a \neq e$, usando le proprietà dei logaritmi e la regola di derivazione di $e^{g(x)}$ e di una funzione composta, possiamo dimostrare che

$$\frac{da^x}{dx} = \frac{de^{\ln a^x}}{dx} = a^x \ln a$$

9. *Derivata del logaritmo*: la derivata della funzione $\ln x$ è

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

Derivate di ordine maggiore

Se la derivata esiste ovunque all'interno del dominio, diciamo che la funzione è *derivabile con continuità*. Per esempio, la funzione $f(x) = 1/x$ considerata nell'intervallo $(0,1]$ è derivabile con continuità. Possiamo utilizzare la regola per la derivata di una potenza per dimostrare che la derivata è

$$\frac{d\left[\frac{1}{x}\right]}{dx} = \frac{d[x^{-1}]}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

Anche la derivata è derivabile con continuità in $(0,1]$. Possiamo utilizzare la regola per la derivata di una potenza per derivare una seconda volta questa derivata:

$$\frac{d\left[-\frac{1}{x^2}\right]}{dx} = \frac{d[-x^{-2}]}{dx} = \frac{2}{x^3}$$

Anziché riferirci a questo risultato come “la derivata della derivata di $f(x)$ ”, lo chiameremo la *derivata seconda* di $f(x)$, e scriveremo $d^2f(x)/dx^2$.

Le *derivate di ordine maggiore* vengono definite in modo simile. La derivata della derivata della derivata di $f(x)$ è definita *derivata terza* di $f(x)$ e scritta $d^3f(x)/dx^3$. Quindi, più in generale, la derivata di ordine n di $f(x)$ è $d^n f(x)/dx^n$.

Derivate parziali

Quando consideriamo una funzione in più variabili, siamo interessati a studiare come cambia il valore della funzione al variare di una variabile mantenendo costanti le altre. Consideriamo una funzione in due variabili reali $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. È più complesso definire la pendenza di questa funzione in un punto rispetto al caso di una funzione in una sola variabile, poiché la pendenza della funzione in un punto dipende dalla direzione. Per esempio, consideriamo

$$f(N, E) = N^2 - E^2 + 1$$

dove N indica la latitudine e E la longitudine. Il valore della funzione f calcolato in un punto può essere pensato come l'altitudine. La Figura A.3 mostra la superficie e le linee di contorno della funzione.

Questa funzione assume valore 1 nell'origine, ma cambia mano a mano che ci spostiamo dall'origine e a seconda della direzione che prendiamo. Se ci muoviamo verso nord-est, allora N ed E aumenteranno allo stesso tasso (così come i loro quadrati). Pertanto se ci spostiamo in direzione nord-est oppure sud-ovest, l'altitudine non cambia. Nella figura, le curve nel piano (N, E) sono le linee di contorno della superficie al di sopra del piano. Le curve mostrano che se E aumenta allo stesso tasso di N , l'altitudine rimane costante.

Se partiamo dall'origine per andare verso nord, N aumenta mentre E rimane invariato. L'altitudine aumenta in questa direzione. Al contrario, se ci dirigiamo verso est, E aumenta mentre N rimane costante e l'altitudine diminuisce (dopo aver viaggiato per E unità, ci troviamo a un'altitudine di $1 - E^2$).

Il fatto di spostarsi *solo* verso nord oppure *solo* verso est è l'idea che sta dietro al concetto delle *derivate parziali*: l'idea è quella di modificare il valore di una variabile mantenendo costanti tutte le altre. Questo procedimento ci permet-

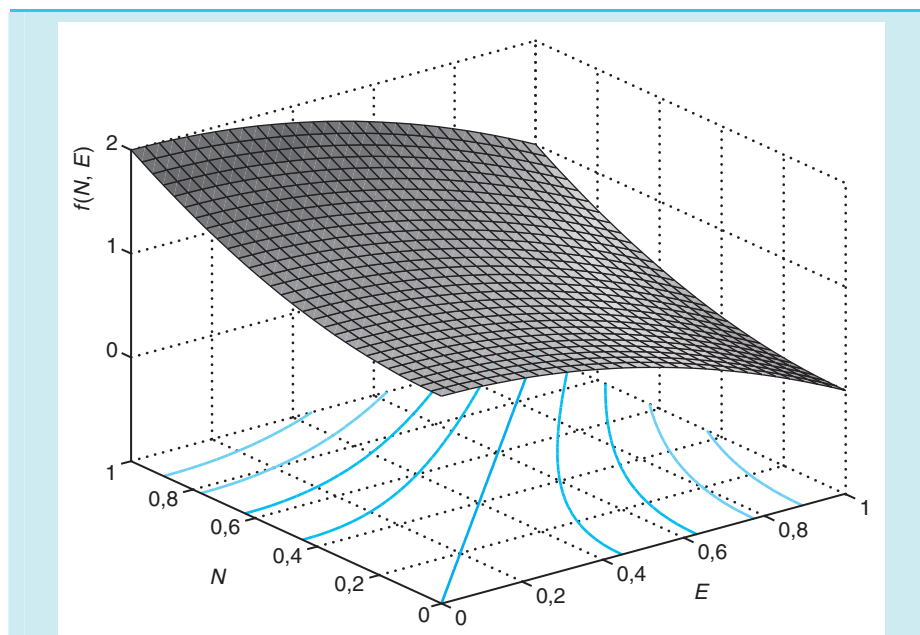


Figura A.3 Derivate parziali. La figura mostra la superficie e le linee di contorno della funzione $f(N, E) = N^2 - E^2 + 1$. Se ci muoviamo solo in direzione N l'altitudine aumenta a un tasso crescente, mentre se ci muoviamo solo in direzione E l'altitudine diminuisce allo stesso tasso crescente. Le curve sul piano (N, E) sono le linee di contorno della superficie al di sopra del piano. Le curve mostrano che se E aumenta allo stesso tasso di N , l'altitudine rimane costante.

te di avere un algoritmo semplice per il calcolo della derivata parziale di f rispetto, per esempio, a N : basta considerare E una costante e calcolare la derivata ordinaria. Pertanto definiamo la derivata parziale di f rispetto a N

$$\frac{\partial f(N, E)}{\partial N} = \frac{\partial(N^2 - E^2 + 1)}{\partial N} = \frac{\partial N^2}{\partial N} = 2N$$

e la derivata parziale di f rispetto a E

$$\frac{\partial f(N, E)}{\partial E} = \frac{\partial(N^2 - E^2 + 1)}{\partial E} = \frac{\partial(-E^2)}{\partial E} = -2E$$

Nel caso particolare in cui f è una funzione in una sola variabile, la derivata parziale è esattamente uguale alla derivata ordinaria:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{df(x)}{dx}$$

Nel caso generale in cui la funzione $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dipende da più variabili, si può pensare che la derivata parziale di f rispetto, per esempio, alla prima variabile, misuri gli effetti *diretti* dei cambiamenti della prima variabile sul valore della funzione, mentre non considera gli effetti che le variazioni di questa variabile potrebbero avere su *altre* variabili che possono influenzare il valore di $f(x)$. Così come la derivata ordinaria di una derivata ordinaria è definita derivata (ordinaria) seconda, esistono anche derivate parziali di ordine maggiore. Per esempio,

la derivata parziale di $g(x_1, x_2)$ rispetto a x_1 si indica con $\partial g(x_1, x_2)/\partial x_1$; la derivata parziale seconda di $g(x_1, x_2)$ rispetto a x_1 si indica con $\partial^2 g(x_1, x_2)/\partial x_1^2$, mentre la derivata parziale seconda di $g(x_1, x_2)$ rispetto a x_2 si indica con $\partial^2 g(x_1, x_2)/\partial x_2^2$.

È possibile calcolare derivate di secondo grado (o di grado superiore) che implicano ripetute derivazioni della funzione rispetto a più di una variabile. Per esempio, se differenziamo la derivata parziale della nostra funzione $g(x_1, x_2)$ rispetto a x_1 , ossia $\partial g(x_1, x_2)/\partial x_1$, rispetto a x_2 , otteniamo la derivata parziale mista $\partial^2 g(x_1, x_2)/\partial x_1 \partial x_2$. L'ordine di derivazione non ha importanza per le funzioni che di solito prendiamo in esame. Per il teorema di Young, $\partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_1 \partial x_2 = \partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_2 \partial x_1$ se le derivate parziali miste, $\partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_1 \partial x_2$ e $\partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_2 \partial x_1$, esistono e sono continue. Allo stesso modo, $\partial^5 g(x_1, x_2)/\partial x_1^2 \partial x_2^3$ indica la derivata parziale di g rispetto a x_1 per due volte e rispetto a x_2 per tre volte, e ciò porta a una derivata parziale di quinto grado.

Il teorema di Eulero

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è omogenea di grado γ se

$$y = f(tx_1, tx_2, tx_3, \dots, tx_n) = t^\gamma f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

esiste per tutti i valori di $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ e dello scalare t . Questo significa che moltiplicando ogni argomento della funzione per t il valore della funzione cresce di t^γ . Non è necessario che il grado sia un numero intero. Per esempio la funzione Cobb-Douglas $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ è omogenea di grado $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, dove gli α_i possono essere delle frazioni. Questa funzione soddisfa il teorema di Eulero:

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \gamma f(x_1, \dots, x_n)$$

A.4 Massimi e minimi

La maggior parte dell'analisi microeconomica riguarda la ricerca di massimi e minimi di una funzione. Per esempio, un consumatore sceglie un paniere di beni per massimizzare la propria utilità oppure un'impresa sceglie la quantità di fattori produttivi che minimizza i costi.

Anche se a prima vista la ricerca di un massimo e la ricerca di un minimo possono sembrare problemi molto diversi tra loro, matematicamente sono molto simili. Dobbiamo quindi pensare alla ricerca sia di un massimo che di un minimo come casi particolari della ricerca degli estremi di una funzione.

Estremi locali

Talvolta i matematici e gli economisti sono interessati alle *proprietà locali* di una funzione o, in modo equivalente, alle proprietà di una funzione *nell'intorno* di un punto x . Una proprietà locale vale nell'intorno di x , e cioè per quei punti che distano al massimo $\varepsilon > 0$ (con ε molto piccolo) dal punto x . Per esempio, si dice che una funzione ha un massimo locale nel punto x^* se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, cioè per ogni x appartenente all'intorno di x^* .

Un *estremo locale* di una funzione $f(x)$ è un minimo locale o un massimo locale della funzione f . Se ci si sposta dall'estremo locale in x di una distanza minore di ε , allora il valore della funzione diventa “meno estremo” (più grande o più piccolo, rispettivamente). La Figura A.4 rappresenta il grafico della funzione $f(x) = x \sin(6\pi x)$, che presenta molti massimi e minimi locali. Tutti gli estremi locali sono indicati con dei pallini. I punti a , b e c sono massimi locali, mentre i punti d , e ed f sono minimi locali. Tutti questi punti formano l'insieme degli estremi locali. Il punto a è un massimo locale in quanto, aumentando o diminuendo di poco il valore di x , il valore di $f(x)$ diminuisce. Analogamente, d è un minimo locale in quanto, aumentando o diminuendo di poco il valore di x , il valore di $f(x)$ aumenta.

Estremi globali

Il *massimo globale* (generalmente definito solo come *massimo*) è il massimo locale più grande, mentre il *minimo globale* (generalmente definito solo come *minimo*) è il minimo locale più piccolo. Nella Figura A.4, il massimo globale (nell'intervallo considerato) è rappresentato dal punto c e il minimo globale dal punto f . Nel caso in cui vi siano due massimi locali uguali e maggiori di tutti gli altri punti, si dirà che esistono due massimi globali.

Esistenza degli estremi

Spesso in economia si vuole sapere se una funzione ha un massimo o un minimo nel suo dominio rilevante. Per esempio vogliamo sapere se la funzione $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ha un minimo; questa simbologia ci dice che la funzione f prende i valori compresi nell'intervallo tra zero e uno (inclusi) e li mappa sulla retta reale.

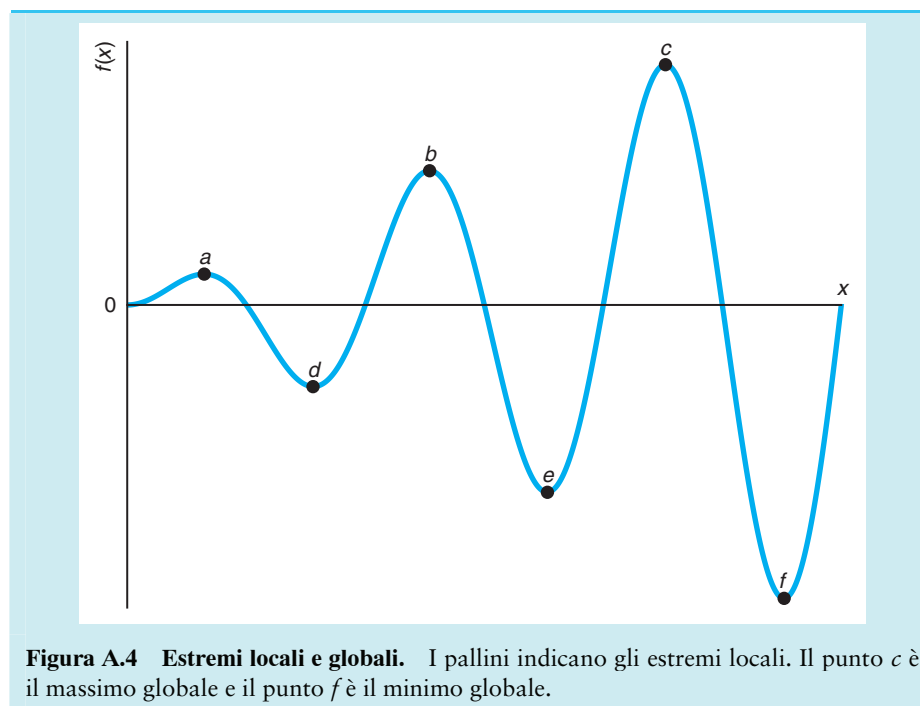


Figura A.4 Estremi locali e globali. I pallini indicano gli estremi locali. Il punto c è il massimo globale e il punto f è il minimo globale.

Non tutte le funzioni di questo tipo hanno un massimo o un minimo. La continuità di una funzione è una condizione *sufficiente* perché esistano sia il massimo che il minimo. Questo risultato è la conseguenza del teorema di Weierstrass: se la funzione f è definita e continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$, allora esiste almeno un punto c all'interno di $[a, b]$ tale che $f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ ed esiste almeno un punto d tale che $f(d) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Invece, le funzioni non continue possono avere o meno un massimo e un minimo.

La Figura A.5 mostra vari casi. Il grafico (a) rappresenta la funzione continua $y = f(x) = 24x - 75x^2 + 50x^3$, che presenta un solo minimo e un solo massimo (locale e globale) in $[0, 1]$. Nel grafico (b), invece, la funzione continua $y = f(x) = 1$ ha un numero infinito di massimi e minimi in $[0, 1]$. Nel grafico (c), la discontinuità della funzione

$$y = \begin{cases} 24x - 75x^2 + 50x^3, & x < 0,8 \\ 24x - 75x^2 + 50x^3, & x > 0,8 \end{cases}$$

nel punto $x = 0,8$ è rappresentata da un pallino vuoto. Mancando questo punto, esiste un solo massimo, mentre non c'è il minimo globale in $[0,1]$. Infine, nel grafico (d), la funzione discontinua

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0,8 \\ 1, & x \geq 0,8 \end{cases}$$

possiede un numero infinito di massimi e minimi all'interno di $[0,1]$.

Unicità degli estremi

Come mostrano i grafici (b) e (d) della Figura A.5, quando una funzione ha massimo o minimo globali, è possibile che ne esista più di uno. Vogliamo determinare in quali casi la funzione avrà un'unica soluzione. Esiste un unico massimo globale se la funzione f è strettamente concava ed esiste un unico minimo globale se f è strettamente convessa. Per esempio, nel grafico (a) della Figura A.5, quando x è minore di 0,46, punto in cui la curva tocca l'asse orizzontale, la funzione è concava e quindi c'è un unico massimo globale. Alla destra di questo stesso punto invece la funzione è convessa e ha un solo minimo globale.

Estremi interni

Ci si può chiedere se il minimo o il massimo si trovino all'interno del dominio oppure in uno dei due estremi. Per poter illustrare questa differenza, consideriamo la funzione $f(x) = -(x - 1/2)^2/2$, dove il valore di x è compreso nell'intervallo $[0,1]$, come mostra il grafico (a) nella Figura A.6. Questa funzione ha un massimo nel punto a dove $x^* = 0,5$, valore che viene definito *massimo interno* in quanto $x \in (0,1)$, ossia non si trova in uno dei due estremi del dominio $[0,1]$. Questo significa che x^* non è né zero né uno. Al contrario, il grafico (b) rappresenta il caso in cui il massimo della funzione $g(x) = -x^2/2$ è zero nel punto a , che coincide con uno degli estremi del dominio $[0,1]$. Pertanto il massimo di questa funzione *non* è interno.

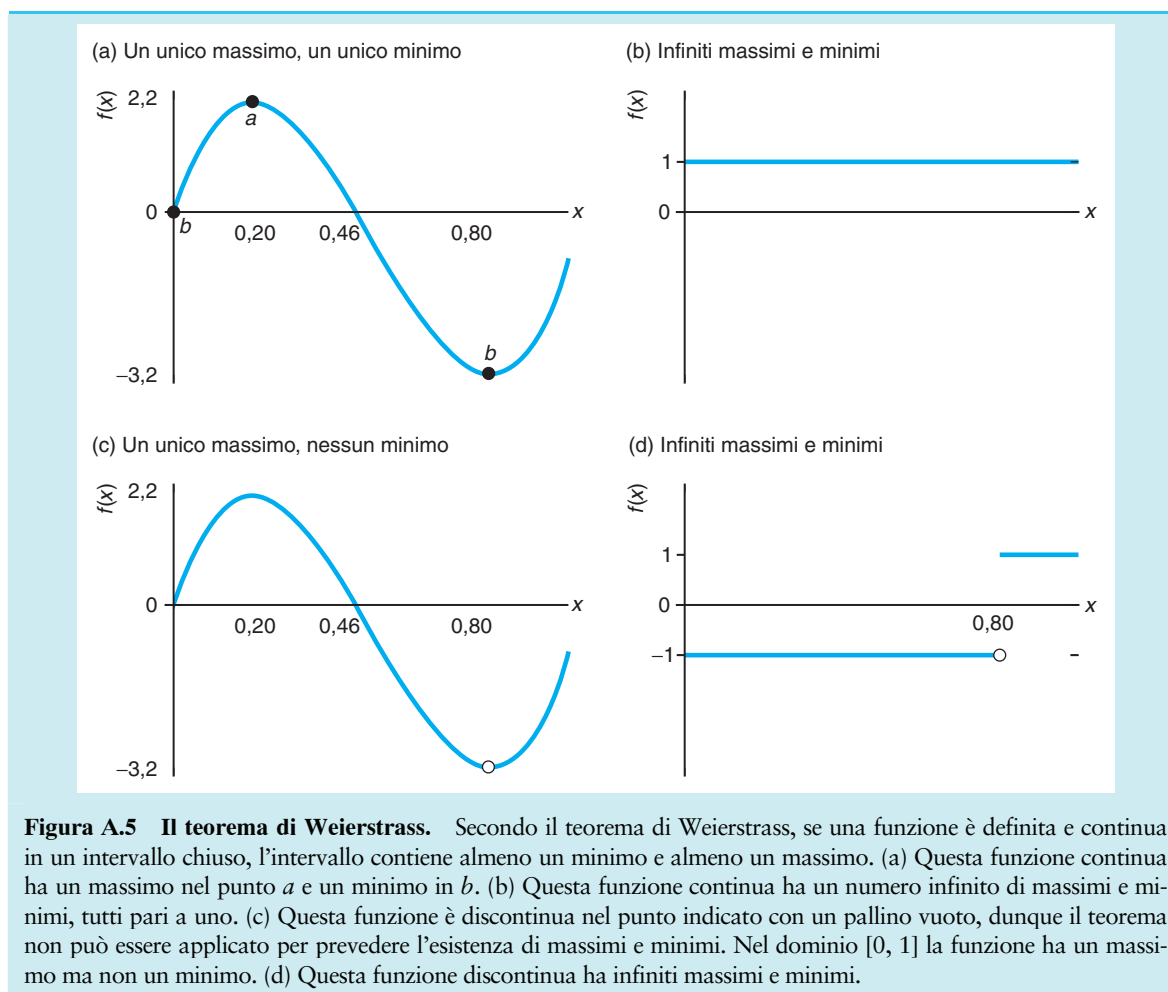


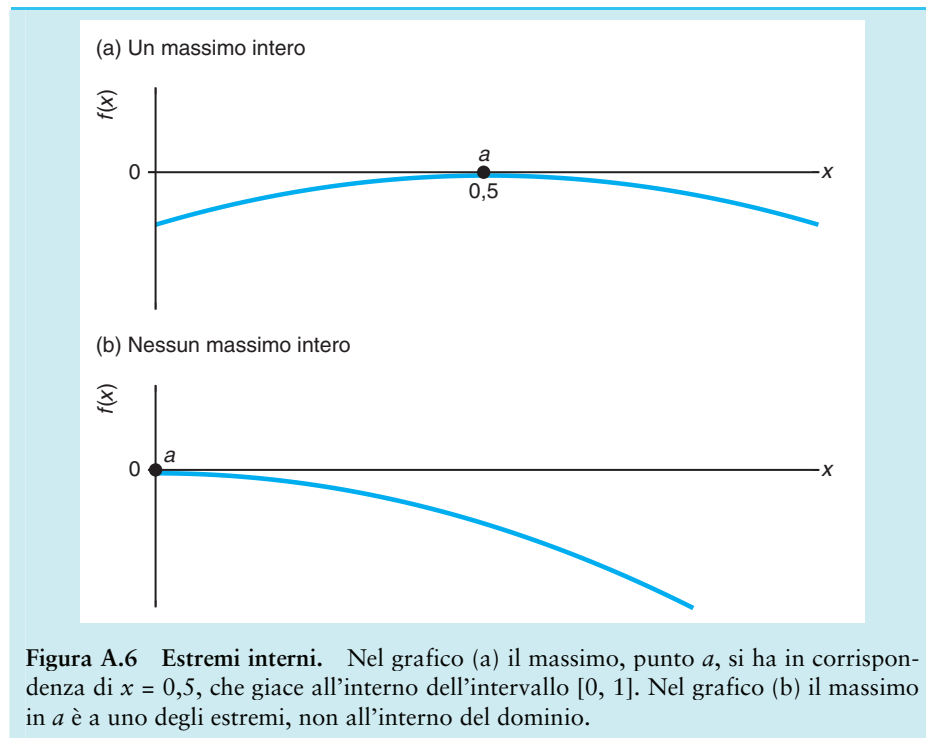
Figura A.5 Il teorema di Weierstrass. Secondo il teorema di Weierstrass, se una funzione è definita e continua in un intervallo chiuso, l'intervallo contiene almeno un minimo e almeno un massimo. (a) Questa funzione continua ha un massimo nel punto a e un minimo in b . (b) Questa funzione continua ha un numero infinito di massimi e minimi, tutti pari a uno. (c) Questa funzione è discontinua nel punto indicato con un pallino vuoto, dunque il teorema non può essere applicato per prevedere l'esistenza di massimi e minimi. Nel dominio $[0, 1]$ la funzione ha un massimo ma non un minimo. (d) Questa funzione discontinua ha infiniti massimi e minimi.

A.5 Calcolo degli estremi di una funzione

Poiché non è sempre facile tracciare il grafico di una funzione e cercarne gli estremi, per praticità si può usare il calcolo differenziale per individuare gli estremi locali. L'idea centrale è che per le funzioni derivabili con continuità la pendenza in corrispondenza di ciascun minimo o massimo interno è pari a zero. La Figura A.7 illustra questo punto.

Visto che le derivate possono essere considerate come la pendenza di una funzione, un modo per trovare tutti gli estremi locali interni di una funzione derivabile con continuità è vedere dove le derivate parziali della funzione sono uguali a zero. Per esempio, consideriamo una funzione in una sola variabile indipendente $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dove ipotizziamo che f sia derivabile con continuità e strettamente concava. Qual è l'importanza di queste ipotesi?

L'ipotesi che f sia derivabile con continuità ha due importanti conseguenze: in primo luogo, se f è derivabile con continuità deve anche essere continua e pertanto sappiamo che avrà un massimo. In secondo luogo, sappiamo che esiste la sua derivata e perciò si può utilizzare questa derivata per determinare gli estremi locali.



Visto che abbiamo ipotizzato che f sia strettamente concava, sappiamo anche che essa avrà un unico massimo globale. Pertanto se troviamo un punto x in cui $df(x)/dx = 0$, questo punto x è l'unico massimo globale della funzione f sull'intervallo $[0, 1]$.

Il modo più comune per scrivere il problema della ricerca del massimo di una funzione $f(x)$ è

$$\max_x f(x)$$

dove \max indica l'operatore *massimo*, la variabile x che appare sotto \max è la variabile di scelta, cioè la variabile rispetto alla quale massimizzare, e f è la funzione da massimizzare e viene chiamata *funzione obiettivo*.

Ogni x^* compreso nell'intervallo $[0, 1]$ che risolve $df(x^*)/dx = 0$ è un punto in cui la funzione $f(x)$ ha un massimo locale. L'equazione $df(x)/dx = 0$, in cui poniamo la derivata prima uguale a zero, è detta *condizione di primo ordine*. La x^* che risolve l'equazione $df(x^*)/dx = 0$ è detta *valore critico*. Quindi, partendo dalle ipotesi che f sia derivabile con continuità e concava, segue che x^* è l'unico massimo globale.

Finora abbiamo ipotizzato che f sia concava, come mostra il grafico (a) della Figura A.7. Nella pratica è necessario verificare che la funzione è concava. Per esempio, se ipotizziamo erroneamente che la funzione sia concava mentre invece è convessa, potremmo trovare un minimo piuttosto che un massimo, come mostra il grafico (b).

Se $f(x^*)$ è derivabile almeno due volte in un intorno di x^* , possiamo utilizzare la *condizione di secondo ordine* per determinare se la funzione sia concava in quell'intorno. La condizione di secondo ordine per la concavità richiede che la derivata seconda di $f(x^*)$ sia negativa, $d^2 f(x^*)/dx^2 < 0$. Se vale questa condizione,

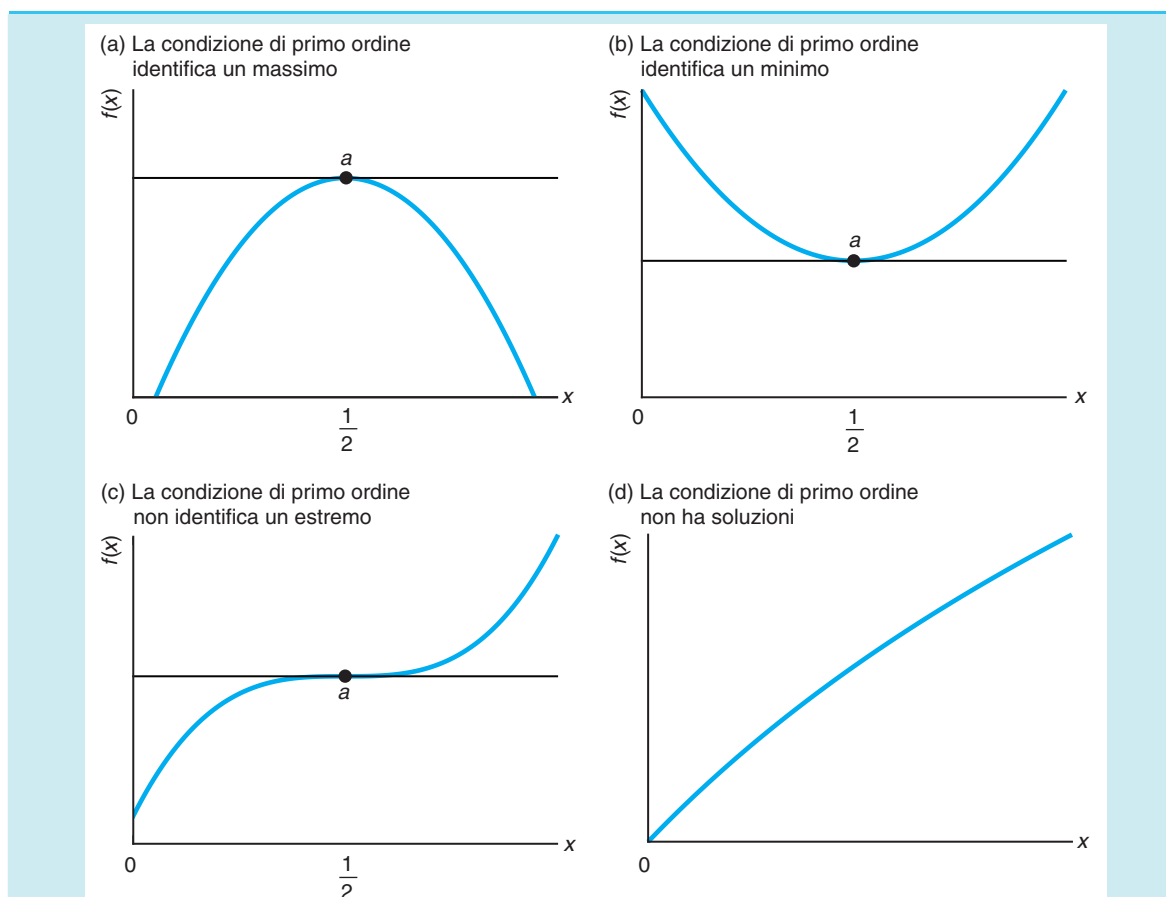


Figura A.7 Gli estremi e la condizione di primo ordine. Se una funzione è derivabile con continuità e concava, deve avere un unico massimo. Inoltre, se vi è un punto in cui la condizione di primo ordine è verificata (ossia la funzione ha pendenza nulla), il punto è l'unico massimo. (a) Questa funzione è derivabile con continuità e concava, dunque la condizione di primo ordine identifica un unico massimo (punto a). (b) La funzione è derivabile con continuità, dunque ha almeno un massimo, ma non è concava, dunque il massimo non è necessariamente unico (in realtà ce ne sono due, agli estremi dell'intervallo). La funzione è convessa, dunque la condizione di primo ordine individua un minimo. (c) La funzione è derivabile con continuità, dunque ha un massimo nell'intervallo $[0,1]$. Tuttavia, nel punto a in cui vale la condizione di primo ordine la funzione non è né concava né convessa, dunque il punto a non è né un minimo né un massimo: è un *punto di sella*. (d) La funzione è concava, dunque il massimo è unico. Tuttavia la condizione di primo ordine non ha soluzioni nell'intervallo $[0, 1]$: non vi è alcun punto nell'intervallo in cui la funzione abbia pendenza nulla, dunque la condizione di primo ordine non permette di individuare il massimo.

ne consegue che il punto x^* trovato grazie alla condizione di primo ordine è l'unico massimo nell'intorno di x^* . Se invece la derivata seconda è positiva, ne consegue che la funzione è convessa in questo intorno e si ha quindi un minimo.

Esempi

Possiamo mostrare questo tipo di approccio attraverso alcuni esempi dove $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Il primo problema di massimizzazione che prendiamo in considerazione è il seguente:

$$\max_x -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

La condizione di primo ordine è $df(x)/dx = 1/2 - x = 0$, e dunque $x^* = 1/2$, come mostra il grafico (a) nella Figura A.7. La condizione di secondo ordine è $d^2 f(x^*)/dx^2 = -1 < 0$, e quindi $x^* = 1/2$ è un punto di massimo. Si può dimostrare che f è derivabile con continuità e concava in ogni parte del suo dominio, quindi $f(1/2) = 0$ è il massimo globale della funzione. Ora consideriamo il problema di massimizzazione

$$\max_x \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

La condizione di primo ordine è $df(x)/dx = x - 1/2 = 0$, quindi questo problema presenta lo stesso valore critico $x = 1/2$ dell'esempio precedente. Considerando che f è derivabile con continuità, sappiamo che essa ha un massimo e un minimo in $[0, 1]$. La condizione di secondo ordine è $d^2 f(x^*)/dx^2 = 1 > 0$ e quindi $x^* = 1/2$ è un punto di minimo, come mostra il grafico (b) nella Figura A.7. Esistono due massimi globali non interni in $x = 0$ e $x = 1$.

Il problema di massimizzazione

$$\max_x \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$$

ha come condizione di primo ordine $df(x)/dx = (x - 1/2)^2 = 0$ e quindi anche in questo caso il valore critico è $x = 1/2$. Poiché f è derivabile con continuità, sappiamo che essa ha un massimo e un minimo in $[0, 1]$, ma, come nell'esempio precedente, il massimo non è interno: si ha in $x = 1$. Questa funzione non è né concava né convessa per $x = 1/2$, e quindi $x^* = 1/2$ non è né un minimo né un massimo di f , come mostra il grafico (c) della Figura A.7; viene definito *punto di sella*. Si ha un punto di sella quando la derivata seconda è pari a zero, come nel nostro caso: $d^2 f(1/2)/dx^2 = 2(x - 1/2) = 2(1/2 - 1/2) = 0$. Il segno della derivata seconda cambia da un lato all'altro del punto di sella.

L'ultimo problema di massimizzazione è

$$\max_x \ln(x + 1)$$

da cui segue la condizione di primo ordine $1/(x + 1) = 0$. In questo caso f è derivabile con continuità e strettamente concava e pertanto sappiamo che esiste un unico massimo globale. Tuttavia, non esiste alcun valore di x nell'intervallo $[0, 1]$ che soddisfi la condizione di primo ordine. Ne consegue che l'unico massimo globale *non* è interno (in questo caso si ha in $x = 1$) come mostra il grafico (d) della Figura A.7.

Più in generale, possiamo avere la necessità di trovare il massimo di una funzione in più variabili e quindi appaiono più variabili di scelta al di sotto dell'operatore max. Utilizzando il calcolo differenziale per risolvere questo problema di massimizzazione, consideriamo le derivate parziali della funzione obiettivo rispetto a ognuna delle variabili di scelta e poi uguagliamole a zero. Le equazioni nelle quali le derivate parziali prime sono poste uguali a zero si chiamano *condizioni di primo ordine*.

Per esempio, sia $g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che g sia derivabile con continuità e strettamente concava. Come per f , ne consegue che g ha un unico massimo globale. Dunque il problema può essere scritto nel seguente modo:

$$\max_{x_1, x_2} g(x_1, x_2)$$

che porta alla coppia di condizioni di primo ordine

$$\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{A.4})$$

La soluzione delle Equazioni A.3 e A.4 determina il punto in cui c'è il massimo globale di g , nell'ipotesi che una soluzione esista. Qualora non esista alcuna soluzione a queste equazioni, allora il massimo si troverà sulla frontiera dell'insieme di scelta $[0,1] \times [0,1]$, così che o x_1 o x_2 (o entrambi) saranno uguali a zero o a uno nel massimo.

Funzioni obiettivo indirette e teorema dell'involuppo

Di solito i problemi economici coinvolgono variabili di scelta che sono controllate da un individuo o da un'impresa, come per esempio la quantità di un bene da acquistare o da produrre. Inoltre essi possono dipendere da parametri *esogeni* che influenzano il comportamento del decisore, ma che non sono sotto il suo diretto controllo, come per esempio il prezzo di acquisto o di vendita del bene. Possiamo aggiungere questi parametri esogeni per formulare il problema di massimizzazione.

Per illustrare questo procedimento, consideriamo la funzione $g : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Scriviamo la funzione e i suoi argomenti come $g(x_1, x_2, z)$, dove le variabili x_1 e x_2 sono variabili di scelta e z è un parametro esogeno. Ipotizziamo che g sia derivabile con continuità in tutti e tre i suoi argomenti e strettamente concava nei primi due (le variabili di scelta). Di conseguenza g ha un unico massimo globale (anche se g non è concava nei parametri esogeni).

Il problema del decisore è quello di scegliere x_1 e x_2 per massimizzare g dato z , cioè

$$\max_{x_1, x_2} g(x_1, x_2, z)$$

Le condizioni di primo ordine sono

$$\frac{\partial g(x_1, x_2, z)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial g(x_1, x_2, z)}{\partial x_2} = 0$$

e pertanto la scelta ottima di x_1 e x_2 dipende dal valore di z . Allo stesso modo i valori di x_1 e x_2 che risolvono il problema di ottimizzazione per un dato z pos-

sono essere scritti come $x_1^*(z)$ e $x_2^*(z)$. Trovata una soluzione al problema di massimizzazione, il valore di g nel punto di massimo è pari a $g(x_1^*(z), x_2^*(z), z)$. Dato un certo valore di z , il processo di massimizzazione determina i valori ottimali di x_1^* e x_2^* . Allo stesso modo è possibile scrivere il massimo come segue:

$$V(z) = g(x_1^*(z), x_2^*(z), z) = \max_{x_1, x_2} g(x_1, x_2, z)$$

La funzione $V(z)$ è chiamata *funzione valore*. È detta anche *funzione obiettivo indiretta*, al contrario di $g(x_1, x_2, z)$, che è la *funzione obiettivo diretta*.

Una domanda che può sorgere è come cambia la funzione valore al variare di z . A prima vista questo problema appare abbastanza complesso in quanto, come abbiamo visto, la variazione di z ha un effetto diretto sul valore di $g(x_1, x_2, z)$, ma fa sì che il decisore modifichi anche x_1 e x_2 . Almeno per quanto riguarda piccole variazioni di z , esiste un'importante scorciatoia per risolvere il problema. Secondo il *teorema dell'involuppo*, per piccole variazioni di z è importante l'effetto diretto, ma non quello indiretto. Quindi, secondo questo teorema, la soluzione al nostro caso particolare è

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = \frac{\partial g(x_1, x_2, z)}{\partial z} \quad (\text{A.5})$$

Presenteremo una versione più generale di questo teorema quando considereremo soluzioni a problemi di massimizzazione vincolata, e ne forniremo una dimostrazione.

Statica comparata

Ora vogliamo anche studiare come una variazione del parametro esogeno z influenzi le variabili di scelta x_1 e x_2 . Per poter rispondere a questa domanda possiamo utilizzare le condizioni di primo ordine, in quanto esse ci mostrano come la scelta ottima di x_1 e x_2 dipenda da z . Nel nostro esempio le condizioni di primo ordine sono

$$\frac{\partial g(x_1^*(z), x_2^*(z), z)}{\partial x_1(z)} = 0$$

$$\frac{\partial g(x_1^*(z), x_2^*(z), z)}{\partial x_2(z)} = 0$$

Possiamo calcolare la derivata di ognuna di queste condizioni di primo ordine rispetto al parametro esogeno purché la funzione g sia due volte derivabile con continuità:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \frac{dx_1^*(z)}{dz} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_2^*(z)}{dz} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_1^*(z)}{dz} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \frac{dx_2^*(z)}{dz} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.7})$$

dove omettiamo gli argomenti della funzione g per semplicità di notazione.

Considerando le derivate $dx_1^*(z)/dz$ e $dx_2^*(z)/dz$ come variabili nella coppia di equazioni lineari A.6 e A.7 e le derivate parziali di g come coefficienti, possiamo risolvere questo sistema di equazioni per determinare come la scelta ottima di x_1 e x_2 cambi per piccole variazioni di z . Questo significa che si può trovare una soluzione per $dx_1^*(z)/dz$ e $dx_2^*(z)/dz$.

A.6 Massimizzazione con vincoli di uguaglianza

In microeconomia sono molti i problemi che coinvolgono la massimizzazione o la minimizzazione di una funzione obiettivo soggetta a uno o più *vincoli*. Per esempio, i consumatori massimizzano la loro utilità dato un vincolo di bilancio; un'impresa sceglie l'insieme di fattori produttivi che minimizzano i costi dato un vincolo tecnologico che riassume le combinazioni di input per produrre una determinata quantità di output.

Ci sono due tipi di approccio che vengono solitamente utilizzati per risolvere matematicamente problemi che hanno vincoli di uguaglianza: il metodo di sostituzione e il metodo di Lagrange. Per poter mostrare questi due approcci, consideriamo il problema di massimizzare la funzione $g(x_1, x_2)$ soggetta al vincolo $h(x_1, x_2) = z$, dove z è il parametro esogeno. Scriviamo il vincolo in forma implicita. Questo problema si scrive nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} g(x_1, x_2) \\ \text{s.t. } z - h(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \tag{A.8}$$

In pratica, è necessario trovare l'insieme di tutti gli x_1 e x_2 che soddisfano il vincolo $z - h(x_1, x_2) = 0$, e solo all'interno di questo insieme scegliere quei valori di x_1 e x_2 che massimizzano $g(x_1, x_2)$.

Metodo di sostituzione

A volte possiamo risolvere un problema di massimizzazione vincolata sostituendo il vincolo nella funzione obiettivo così che il problema diventa non vincolato. Il vincolo quindi può essere riscritto come $x_1 = r(x_2, z)$. Possiamo allora sostituire questa espressione nella nostra funzione obiettivo e riscrivere il problema come un problema di massimizzazione libera:

$$\max_{x_2} g(r(x_2, z), x_2)$$

Poiché abbiamo scritto x_1 come funzione di x_2 , il problema di massimizzazione vincolata ha una sola variabile di scelta, e cioè x_2 .

Come nel caso di un problema di massimizzazione non vincolata, possiamo utilizzare la condizione di primo ordine

$$\frac{\partial g(r(x_2, z), x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial r(x_2, z)}{\partial x_2} + \frac{\partial g(r(x_2, z), x_2)}{\partial x_2} = 0 \tag{A.9}$$

per trovare il valore critico della variabile di scelta x_2 . Risolviamo la condizione di primo ordine, Equazione A.9, per x_2^* e sostituiamo poi questa soluzione in

$x_1 = r(x_2, z)$ per ottenere $x_1^* = r(x_2^*, z)$; infine sostituiamo x_1^* e x_2^* nella funzione obiettivo per ottenere il massimo.

Qui sotto illustriamo questo approccio quando la funzione obiettivo è $g(x_1, x_2) = \ln x_1 x_2$, il vincolo è $z - h(x_1, x_2) = z - x_1 - x_2 = 0$, e pertanto il problema di massimizzazione vincolata è

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \ln(x_1 x_2) \\ \text{s.t. } z - x_1 - x_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Utilizzando il vincolo per trovare x_1 in funzione di x_2 , troviamo che $x_1 = r(x_2, z) = z - x_2$. Se sostituiamo questa funzione nella funzione obiettivo, si ottiene il corrispondente problema di massimizzazione libera:

$$\max_{x_2} \ln((z - x_2)x_2) = \ln(z - x_2) + \ln x_2$$

Poiché la condizione di primo ordine è $-1/(z - x_2) + 1/x_2 = 0$, la soluzione della condizione di primo ordine sarà $x_2^* = 0,5z$. Se sostituiamo questa espressione nella formula per x_1 , troviamo che $x_1^* = z - 0,5z = 0,5z$. Il valore della funzione obiettivo nei punti x_1^* e x_2^* sarà $g(x_1^*, x_2^*) = \ln(0,25z^2)$.

Il problema nell'utilizzo di questo metodo sta nel fatto che potrebbe risultare molto complesso scrivere x_1 in funzione di x_2 e di z . Se poi si hanno molti vincoli, questo tipo di approccio diventa impraticabile.

Metodo di Lagrange

Per risolvere problemi di massimizzazione vincolata sviluppò un metodo alternativo alla sostituzione, che si adatta a un'ampia gamma di problemi. Come per il metodo di sostituzione, il metodo di Lagrange trasforma un problema di massimizzazione vincolata in uno non vincolato.

Risoluzione di un problema generale. Il primo passo nell'utilizzo del metodo di Lagrange è di scrivere la *funzione lagrangiana*, che è la somma della funzione obiettivo $g(x_1, x_2)$ e del membro sinistro del vincolo $z - h(x_1, x_2)$ moltiplicato per una costante λ detta *moltiplicatore di Lagrange*:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda; z) = g(x_1, x_2) + \lambda[z - h(x_1, x_2)] \quad (\text{A.11})$$

Se $\lambda = 0$ oppure se il vincolo è stringente, la funzione lagrangiana è identica alla funzione obiettivo.

Il secondo passo è quello di trovare i valori critici della funzione lagrangiana (non vincolata), Equazione A.11, dove le variabili di scelta sono quelle iniziali oltre a λ :

$$\max_{x_1, x_2, \lambda} \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda; z) = g(x_1, x_2) + \lambda[z - h(x_1, x_2)] \quad (\text{A.12})$$

Per risolverla utilizziamo le condizioni di primo ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda; z)}{\partial x_1} = \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda; z)}{\partial x_2} = \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda; z)}{\partial \lambda} = z - h(x_1, x_2) = 0 \quad (\text{A.15})$$

Risolviamo simultaneamente le condizioni di primo ordine (Equazioni A.13, A.14 e A.15) per calcolare $x_1^*(z)$, $x_2^*(z)$ e $\lambda^*(z)$. Sostituiamo poi $x_1^*(z)$ e $x_2^*(z)$ all'interno della funzione obiettivo iniziale per determinare il valore massimo $g(x_1^*(z), x_2^*(z))$.

La soluzione di questo problema non vincolato (Equazione A.12) soddisfa anche il problema vincolato iniziale (Equazione A.8). Il metodo di Lagrange può essere generalizzato anche a problemi con più variabili di scelte e più vincoli. Per ogni vincolo è necessario un ulteriore moltiplicatore di Lagrange.

Esempio. Per illustrare questo metodo, prendiamo di nuovo in considerazione il problema di massimizzazione dell'Equazione A.10, dove $g(x_1, x_2) = \ln(x_1 x_2)$ e il vincolo è $z - h(x_1, x_2) = z - x_1 - x_2$. Il problema lagrangiano è

$$\max_{x_1, x_2, \lambda} \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda; z) = \ln(x_1 x_2) + \lambda(z - x_1 - x_2)$$

Le condizioni di primo ordine sono

$$\begin{aligned} 1/x_2 &= \lambda \\ 1/x_1 &= \lambda \\ z - x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Risolvendo simultaneamente queste equazioni, troviamo che

$$x_1^*(z) = 0,5z, \quad x_2^*(z) = 0,5z, \quad \lambda^*(z) = 2/z$$

Poiché questa è la stessa soluzione trovata utilizzando il metodo di sostituzione, anche il valore massimo della funzione obiettivo iniziale è lo stesso: $g(x_1^*, x_2^*) = \ln(0,25z^2)$.

Interpretazione del moltiplicatore di Lagrange. Il moltiplicatore di Lagrange non è utile solo per trasformare un problema di massimizzazione vincolata in uno di massimizzazione non vincolata, ma fornisce anche delle informazioni utili per problemi di tipo economico. Il valore di λ che risolve le condizioni di primo ordine può essere interpretato come il costo (marginale) del vincolo.

La variazione del valore della funzione obiettivo iniziale rispetto a una variazione di z è

$$\frac{dg(x_1^*, x_2^*)}{dz} = \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{dx_1^*}{dz} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{dx_2^*}{dz} = 0$$

Sostituendo le condizioni di primo ordine per le variabili di scelta iniziali (Equazioni A.13 e A.14) all'interno di questa espressione, otteniamo

$$\frac{dg(x_1^*, x_2^*)}{dz} = \lambda^* \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{dx_1^*}{dz} + \lambda^* \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{dx_2^*}{dz} \quad (\text{A.16})$$

Derivando la condizione di primo ordine per il moltiplicatore di Lagrange (Equazione A.15), otteniamo

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{dx_1^*}{dz} + \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{dx_2^*}{dz} = 1 \quad (\text{A.17})$$

Sostituendo l'Equazione A.17 nell'Equazione A.16 troviamo che

$$\frac{dg(x_1^*, x_2^*)}{dz} = \lambda^* \quad (\text{A.18})$$

L'Equazione A.18 mostra che il valore del moltiplicatore di Lagrange rispecchia la sensibilità della funzione obiettivo a una variazione del parametro esogeno z . Nel nostro ultimo esempio, un piccolo aumento in z determina una variazione nel valore della funzione obiettivo di un fattore $\lambda = 2/z$.

A.7 Massimizzazione con vincoli di disuguaglianza

Il metodo per la risoluzione di problemi con estremi vincolati introdotto da Lagrange è appropriato nel caso di vincoli di uguaglianza. Il metodo funziona anche nel caso più generale di vincoli di disuguaglianza, se sappiamo che il vincolo varrà con il segno di uguaglianza in corrispondenza della soluzione del problema. Per esempio Lisa, che vuole consumare la massima quantità possibile di beni, pur non dovendo necessariamente spendere tutto il suo denaro, alla fine lo spenderà. Tuttavia, quando non sappiamo se un vincolo sarà soddisfatto o meno con il segno di uguaglianza, abbiamo bisogno di nuovi strumenti.

La Figura A.8 mostra la differenza tra un massimo non vincolato e un massimo di una funzione obiettivo concava $f(x)$ soggetta a un vincolo di disuguaglianza. La funzione non vincolata raggiunge il massimo nel punto a , dove la tangente alla curva è orizzontale. Questo significa che la condizione di primo ordine implica che $df(x)/dx = 0$.

Se x deve essere minore o uguale a z , $x \leq z$, allora il punto b nella figura è il massimo vincolato. Ciò si verifica quando la retta verticale passante per z interseca la funzione. In quel punto la tangente alla funzione ha coefficiente angolare positivo, così che $df(x)/dx > 0$.

Non è necessario che un vincolo di disuguaglianza sia stringente. Se z è talmente grande da superare la x corrispondente al punto a , x_a , allora il vincolo di disuguaglianza non è stringente e il massimo resta in a , dove si mantiene la condizione di primo ordine del massimo non vincolato.

Possiamo risolvere matematicamente questo tipo di problemi utilizzando il metodo di Kuhn-Tucker, che ha preso il nome dai suoi inventori Harold Kuhn e Albert Tucker. Inizieremo ad applicare questo metodo a un esempio specifico per poi utilizzarlo più in generale.

Una dimostrazione del metodo di Kuhn-Tucker

L'approccio di Kuhn-Tucker assomiglia a quello di Lagrange a eccezione del fatto che esso permette l'uso sia di vincoli di disuguaglianza (maggiore di o uguale a) che di vincoli di uguaglianza. Per poter illustrare questo metodo, consideriamo il problema di massimizzare la funzione obiettivo $a \ln(x_1) + b \ln(x_2)$, dove a

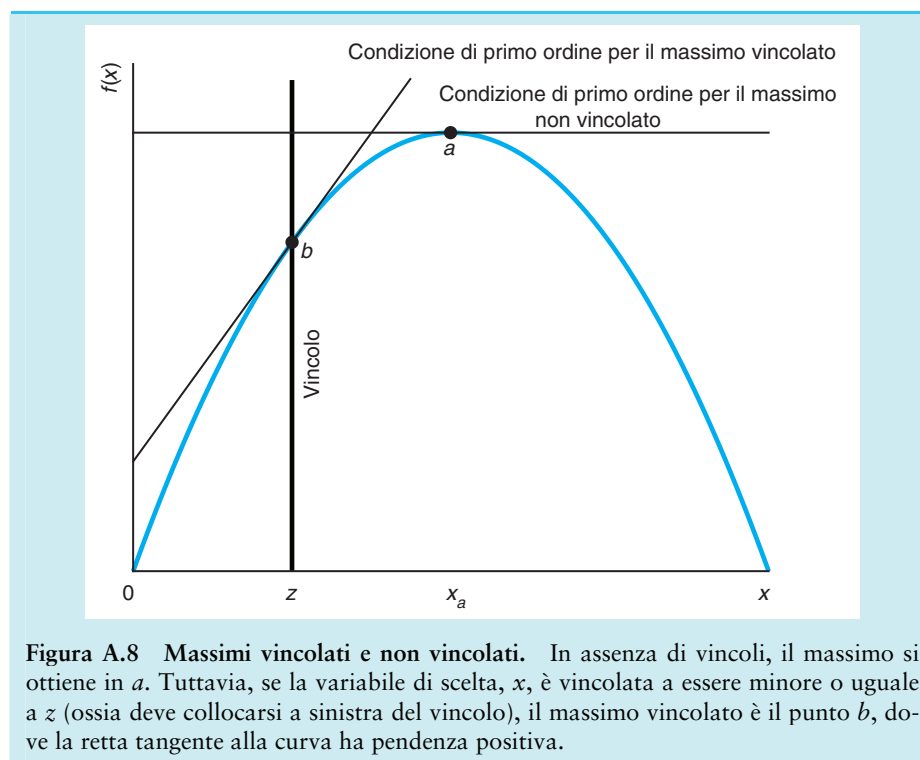


Figura A.8 Massimi vincolati e non vincolati. In assenza di vincoli, il massimo si ottiene in a . Tuttavia, se la variabile di scelta, x , è vincolata a essere minore o uguale a z (ossia deve collocarsi a sinistra del vincolo), il massimo vincolato è il punto b , dove la retta tangente alla curva ha pendenza positiva.

e b sono valori positivi, soggetta ai vincoli $z - p_1x_1 - p_2x_2 \geq 0$ e $x_1 \geq 0$, dove p_1, p_2 e z sono tutti positivi. È possibile che questi vincoli siano stringenti. Per esempio, è possibile che la soluzione di questo problema implichi $x_1 = 0$. Scriviamo questo problema nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2, \lambda} & a \ln(x_1 + 1) + b \ln(x_2) \\ \text{s.t.} & z - p_1x_1 - p_2x_2 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{A.19}$$

L'insieme di tutti i vincoli sulle variabili di scelta definisce implicitamente un insieme di valori "possibili" per le variabili di scelta. In questo esempio, l'insieme di valori possibili è definito da $\{(x_1, x_2) \mid z - p_1x_1 - p_2x_2 \geq 0 \text{ e } x_1 \geq 0\}$ ed è chiamato *insieme vincolo*.

Scriviamo ora la funzione lagrangiana (funzione che porta ancora il nome di Lagrange piuttosto che quelli di Kuhn e Tucker) scegliendo ulteriori variabili da moltiplicare per il membro sinistro dei vincoli per poi aggiungerci la funzione obiettivo,

$$\mathcal{L}(x_1, x_2; \lambda, \mu) = a \ln(x_1 + 1) + b \ln(x_2) + \lambda(z - p_1x_1 - p_2x_2) + \mu x_1$$

dove λ e μ sono definiti *moltiplicatori di Kuhn-Tucker* (o spesso più semplicemente *moltiplicatori*).

Kuhn e Tucker dimostrarono che è possibile caratterizzare la soluzione al problema dell'Equazione A.19 utilizzando quattro condizioni (due insiemi di due condizioni ciascuno). Le prime due equazioni sono le condizioni di primo

ordine ottenute imponendo che le derivate parziali della funzione lagrangiana rispetto alle variabili di scelta x_1 e x_2 siano uguali a zero:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{a}{x_1 + 1} - p_1 \lambda + \mu = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{b}{x_2} - p_2 \lambda = 0 \quad (\text{A.21})$$

Le altre due condizioni, definite *condizioni di scarto complementare*, ci dicono che il prodotto di ogni moltiplicatore con il membro sinistro del vincolo corrispondente è uguale a zero:

$$\lambda(z - p_1 x_1 - p_2 x_2) = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\mu x_1 = 0 \quad (\text{A.23})$$

Questo significa o che il vincolo è stringente oppure che il moltiplicatore è zero.

Per poter trovare la soluzione del problema dell'Equazione A.19, risolviamo le equazioni dalla A.20 alla A.23 in più passi. Combinando le condizioni di primo ordine nelle Equazioni A.20 e A.21 con le rispettive condizioni di scarto complementare nelle Equazioni A.22 e A.23, otteniamo un sistema di equazioni che caratterizza ogni estremo locale del problema, supposto che sia la funzione obiettivo sia i vincoli siano derivabili con continuità nelle variabili di scelta.

Risistemando l'Equazione A.21 troviamo che $\lambda = b/(p_2 x_2)$ e, poiché b e p_2 sono positivi, anche λ è strettamente positivo: $\lambda > 0$. Combinando poi questo risultato con la condizione di primo ordine per x_1 (Equazione A.22), troviamo che il primo vincolo è stringente: $z - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$. Inoltre, sostituendo questa espressione per λ nella condizione di primo ordine per x_2 (Equazione A.21), otteniamo

$$\frac{a}{x_1 + 1} + \mu = b \frac{p_1}{p_2 x_2}$$

Moltiplicando entrambi i membri di questa espressione per $(x_1 + 1)$ si ottiene

$$a + \mu x_1 + \mu = b(x_1 + 1) \frac{p_1}{p_2 x_2}$$

Dall'Equazione A.23 sappiamo che $\mu x_1 = 0$, pertanto ne consegue che

$$(a + \mu) p_2 x_2 = b p_1 (x_1 + 1) \quad (\text{A.24})$$

Ora ci sono due casi da prendere in considerazione. Se si vuole che la condizione dell'Equazione A.23 venga soddisfatta, o x_1 o μ devono essere uguali a zero. Se $\mu = 0$ e sostituiamo questo valore all'interno dell'Equazione A.24, troviamo che

$$x_2 = \frac{p_1 b}{p_2 a} (x_1 + 1)$$

Sostituendo questa espressione nella condizione di scarto complementare per il primo vincolo (Equazione A.22) e ricordandoci che $\lambda > 0$, troviamo che

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{b}{a+b} \frac{z}{p_2} \\ x_1 &= \frac{a}{a+b} \frac{z}{p_1} - 1 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Se supponiamo invece che $x_1 = 0$, l'Equazione A.24 diventa

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} \frac{b}{a+\mu}$$

Ricordandoci che $\lambda = 0$ e sostituendo questa espressione nelle condizioni di scarto complementare (Equazione A.22) troviamo che $\mu = p_1(b/z) - a$ e $x_2 = z/p_2$.

Abbiamo pertanto due possibili soluzioni. O

$$x_1 = \frac{a}{a+b} \frac{z}{p_1} - 1, \quad x_2 = \frac{b}{a+b} \frac{z}{p_2} \quad \text{e} \quad \mu = 0 \quad (\text{A.26})$$

oppure

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{z}{p_2} \quad \text{e} \quad \mu = p_1 \frac{b}{z} - a \quad (\text{A.27})$$

La presenza di diverse soluzioni (Equazioni A.26 e A.27) non significa che entrambe risolvano il problema di massimizzazione. Solamente una di queste soluzioni risolve il problema di massimizzazione, e quale sia dipende dai parametri a, b, p_1, p_2 e z . Ci sono molti modi per capire quale sia la soluzione corretta. Relativamente a questo esempio, un modo è quello di sostituire i valori effettivi di a, b, z e p_1 nell'espressione per x_1 dell'Equazione A.25 e verificare che sia positiva. Se ciò non accade, $x_1 = 0$.

Condizioni di esistenza e di unicità. Nonostante il metodo di Kuhn-Tucker fornisca uno strumento generale per la formulazione di problemi relativi alla ricerca di estremi vincolati, non c'è alcuna garanzia che esista una soluzione al problema di Kuhn-Tucker. Anche se una soluzione esiste, non c'è alcuna garanzia che essa sia unica.

Nel Paragrafo A.4 abbiamo riassunto le condizioni sufficienti che garantiscono l'esistenza e l'unicità delle soluzioni ai problemi con estremi non vincolati. Ora vogliamo trovare alcune semplici condizioni che garantiscano sia l'esistenza che l'unicità di soluzioni al problema di Kuhn-Tucker.

Vogliamo specificare queste condizioni per un generico problema di Kuhn-Tucker con n variabili di scelta x_1, x_2, \dots, x_n , e dove intendiamo massimizzare la funzione obiettivo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soggetta agli m vincoli, $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ per $j = 1, 2, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2, \dots, x_n} \quad & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{s.t.} \quad & g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad \text{con} \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

La *condizione di Slater* garantisce l'esistenza di una soluzione al problema dell'Equazione A.28. Questa condizione richiede che la soluzione al problema di massimizzazione non sia interamente determinata dai vincoli per alcuna delle

variabili di scelta: esiste un punto (x_1, x_2, \dots, x_n) tale che $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ per tutti i $j = 1, 2, \dots, m$. Poiché questa condizione indica che il vincolo soddisfa una disuguaglianza stretta, l'insieme vincolante è non vuoto.

Esiste un massimo locale se la funzione obiettivo e i vincoli sono derivabili con continuità e se viene soddisfatta la condizione di Slater. Se $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ è un massimo locale del problema dell'Equazione A.28, esso è anche un massimo globale se f è debolmente concava e g_j è debolmente convessa per tutti i $j = 1, 2, \dots, m$. Potrebbe comunque esistere più di un massimo globale.

Le condizioni sufficienti perché un massimo locale $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ del problema dell'Equazione A.28 sia l'unico massimo globale sono che f sia debolmente concava, che g_j sia debolmente convessa per tutti i $j = 1, 2, \dots, m$ e che una delle due condizioni seguenti sia soddisfatta:

- la funzione obiettivo f è strettamente concava; oppure
- almeno uno dei vincoli $g_j(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$ è strettamente convesso nel punto $g_j(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Il teorema dell'inviluppo. Possiamo affermare e dimostrare una versione del teorema dell'inviluppo che vale per i problemi con estremi vincolati. Per facilitare questa dimostrazione, utilizzeremo la formulazione precedente del problema di Kuhn-Tucker, aggiungendo però esplicitamente un parametro esogeno z tale che z abbia un effetto diretto sia sulla funzione obiettivo sia su ciascuno dei vincoli g_j ³

$$\begin{aligned} V(z) &= \max_{x_1, x_2, \dots, x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \\ \text{s.t. } &g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

dove $V(z)$ è il valore massimo della funzione obiettivo. L'equivalente problema di Lagrange è

$$V(z) = \max_{x_1, x_2, \dots, x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \quad (\text{A.30})$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sono i moltiplicatori di Kuhn-Tucker. Le condizioni di primo ordine sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{e con } j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{A.31})$$

e le condizioni di scarto complementare sono

$$\lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{A.32})$$

Il *teorema dell'inviluppo* ci dice che se i vincoli $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ soddisfano la condizione di Slater e se $x_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$, risolvono le condizioni di primo ordine (Equazione A.31) e le condizioni di scarto complementare (Equazione A.32), allora

³ Avremmo potuto aggiungere un qualunque numero finito di tali parametri esogeni, comunque uno è sufficiente per i nostri fini.

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}{\partial z} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial z}$$

Dimostrazione. La funzione valore è $V(z) = f(x_1(z), x_2(z), \dots, x_n(z), z) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$. Se deriviamo questa espressione rispetto a z , otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(z)}{\partial z} &= \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}{\partial z} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(z)}{\partial z} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}{\partial z} \frac{\partial x_i(z)}{\partial z} \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial \lambda_j(z)}{\partial z} g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z) + \lambda_j(z) \frac{\partial g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

Raccogliendo i termini, possiamo scrivere questa equazione come

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(z)}{\partial z} &= \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}{\partial z} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(z)}{\partial z} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}{\partial z} \right] \frac{\partial x_i(z)}{\partial z} + (A.33) \\ &+ \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial \lambda_j(z)}{\partial z} g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z) + \lambda_j(z) \frac{\partial g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

Se utilizziamo l'Equazione A.31, l'ultima espressione compresa tra parentesi quadre dell'Equazione A.33 è uguale a zero. Se riusciamo a dimostrare che l'espressione $\sum (\partial \lambda_j / \partial z) g_j$ compresa nelle altre parentesi quadre è pari a zero, allora siamo riusciti a dimostrare il teorema. Dalle condizioni di scarto complementare sappiamo che $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$. Se $\lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$, allora $(\partial \lambda_j / \partial z) g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$. In alternativa, se $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z) > 0$, così che $\lambda_j = 0$, la condizione di Slater implica che $\partial \lambda_j(z) / \partial z = 0$, dimostrando così il teorema.

Statica comparata. Il metodo della statica comparata può essere utilizzato quando si vuole risolvere un problema con vincoli di disuguaglianza, ma è complicato dover tenere a mente quali vincoli siano stringenti. Ritorniamo al problema dell'Equazione A.19, dove la funzione lagrangiana è $\mathcal{L} = a \ln(x_1 + 1) + b \ln(x_2) + \lambda(z - p_1 x_1 - p_2 x_2) + \mu x_1$ e le condizioni di primo ordine sono

$$\begin{aligned} \frac{a}{x_1 + 1} - p_1 \lambda + \mu &= 0 \\ \frac{b}{x_2} - p_2 \lambda &= 0 \end{aligned}$$

e le rispettive condizioni di scarto complementare sono

$$\lambda(z - p_1 x_1 - p_2 x_2) = 0 \quad (A.34)$$

$$\mu x_1 = 0 \quad (A.35)$$

Queste condizioni di scarto complementare complicano l'analisi di statica comparata. Se un vincolo è stringente, non abbiamo problemi in quanto conosciamo il suo effetto sulla soluzione. Sfortunatamente però non sempre è possibile sapere se un vincolo è stringente.

In questo esempio possiamo contare sul fatto che il primo vincolo è stringente, pertanto sappiamo che $\lambda > 0$. Di conseguenza, possiamo dividere entrambi i membri dell'Equazione A.34 per λ per eliminarlo dalle condizioni di scarto complementare. Non sappiamo però se il vincolo $x_1 \geq 0$ sia stringente senza conoscere i valori dei parametri.

Secondo un primo approccio, ipotizziamo inizialmente che tutti i vincoli siano stringenti e poi sostituiamo i vincoli all'interno delle condizioni di primo ordine e risolviamoli. A questo punto ipotizziamo che il vincolo (Equazione A.35) sia stringente, cioè $x_1 = 0$. Utilizziamo l'Equazione A.27, $x_2 = z/p_2$. Sostituendo queste soluzioni all'interno delle condizioni di primo ordine, otteniamo

$$\begin{aligned} a - \lambda p_1 + \mu &= 0 \\ \frac{b}{z} - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

oppure risolvendo rispetto a μ e λ

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{b}{z} p_1 - a \\ \lambda &= \frac{b}{z} \end{aligned}$$

Potenzialmente abbiamo risolto l'intero sistema con soluzioni per x_1 , x_2 e per entrambi i moltiplicatori. Tuttavia, secondo quanto ipotizzato all'inizio, $x_1 = 0$, si ha che $\mu > 0$ oppure $(b/z)p_1 > a$. Quest'ultima disequaglianza è esattamente quanto volevamo verificare. Se viene soddisfatta, infatti, sapremo di aver trovato la soluzione e di trovarci quindi in un *angolo*. Altrimenti, il massimo sarà interno e non in uno degli angoli e il vincolo $x_1 \geq 0$ non sarà stringente. Se non è stringente, allora $\mu = 0$. A questo punto possiamo inserire questa condizione all'interno delle condizioni di primo ordine e risolverle. Dato l'insieme delle soluzioni, possiamo esaminare l'effetto della variazione di un parametro.

Linee guida per la ricerca degli estremi vincolati di una funzione

Quello che riportiamo qui di seguito è un elenco di istruzioni pratiche per risolvere un problema con estremi vincolati. Ci focalizziamo soprattutto sul *come* piuttosto che sul *perché* di questo meccanismo.

1. *Rendere il problema un problema di massimizzazione.* Se il problema è quello di minimizzare $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soggetta a vincoli, lo si può trasformare nella massimizzazione della stessa funzione cambiata di segno soggetta agli stessi vincoli.
2. Riscrivere ogni vincolo in modo tale che abbia la forma "maggiore di o uguale a zero". Qui di seguito un breve riassunto dei vincoli e di come trattarli.
 - a. *Maggiore di o uguale a:* se inizialmente il vincolo è nella forma $g(x_1, x_2) \geq f(x_1, x_2)$, si sottragga il termine $f(x_1, x_2)$ da entrambi i membri per ottenere $g(x_1, x_2) - f(x_1, x_2) \geq 0$.

- b. *Minore di o uguale a*: dato un vincolo iniziale $g(x_1, x_2) \leq f(x_1, x_2)$, si moltiplichino entrambi i membri per -1 per renderlo un problema di “maggiore di o uguale a” e si utilizzi il metodo illustrato nel punto (a): $f(x_1, x_2) - g(x_1, x_2) \geq 0$.
- c. *Strettamente maggiore o strettamente minore di*: se il vincolo è $g(x_1, x_2) > f(x_1, x_2)$ oppure $g(x_1, x_2) < f(x_1, x_2)$, è più difficoltoso. Se questo vincolo ha un qualunque effetto sul problema, può far sì che non si abbia alcuna soluzione (si consideri il problema di massimizzare x in modo tale che $x > 0$ per vedere perché questo è un problema). È quindi necessario riformulare il problema.
- d. *Uguale a*: se sembra davvero che il vincolo debba soddisfare l’uguaglianza, mettetevi nei panni del decisore che sta risolvendo la massimizzazione. Se il decisore potesse violare il vincolo preferirebbe un vincolo della forma “minore o uguale a” oppure “maggiore o uguale a”? Per esempio, un’impresa che ha di fronte un vincolo che richiede che il livello dell’output q sia pari a una funzione $f(x)$ con input x , se potesse violare le leggi di natura, preferirebbe che l’output fosse maggiore, cioè che $q \geq f(x)$. Imponiamo dunque all’impresa il contrario di ciò che vorrebbe, ossia il vincolo $q \leq f(x)$. Moltiplichiamo entrambi i membri della funzione per -1 e poi spostiamo i termini posti a destra sulla sinistra per ottenere un vincolo del tipo “maggiore o uguale a zero”: $f(x) - q \geq 0$. Chiediamoci nuovamente se il vincolo debba davvero essere stringente: in questo caso l’impresa potrebbe buttare via una parte dell’output? Se la risposta è affermativa, allora è fatta. In caso contrario, si aggiunga un ulteriore vincolo “maggiore o uguale a” ma di segno opposto. Quindi, nell’esempio della nostra impresa, avremo entrambi i vincoli:

$$f(x) - q \geq 0 \tag{A.36}$$

$$q - f(x) \geq 0 \tag{A.37}$$

Si può verificare che questi due vincoli di disuguaglianza implicano un unico vincolo di uguaglianza.

Ora tutti i vincoli sono formulati secondo l’espressione “maggiore o uguale a”. Chiedetevi se non avete dimenticato nessun vincolo. Ci sono variabili di scelta che non possono essere negative? Se sì, aggiungeremo un vincolo di non negatività che imponga a queste variabili di essere maggiori o uguali a zero.

- 3. *Costruire la funzione di Lagrange*. Assegniamo a ognuno dei vincoli un moltiplicatore (per indicarlo è comune utilizzare le lettere dell’alfabeto greco), che moltiplicheremo per il membro sinistro del vincolo corrispondente, e aggiungiamo i prodotti alla funzione obiettivo.
- 4. *Derivare parzialmente la funzione di Lagrange*. Iniziando dalla prima delle nostre variabili di scelta, deriviamo parzialmente la funzione lagrangiana rispetto a questa variabile. Ripetiamo il procedimento per ognuna delle variabili di scelta. Poniamo ognuna di queste espressioni uguale a zero per ottenere una serie di condizioni di primo ordine.
- 5. *Elencare le condizioni di scarto complementare*. Prendiamo ognuno dei prodotti dei vincoli “maggiore o uguale a zero” con i corrispondenti moltiplicatori e imponiamo che siano uguali a zero, per ottenere le condizioni di scarto complementare.
- 6. *Risolvere il sistema di equazioni*. Risolviamo allo stesso tempo tutte le condizioni di primo ordine e quelle di scarto complementare per trovare i valori

critici. L'insieme di valori delle variabili di scelta che soddisfa questo sistema risolve il problema di massimizzazione vincolata.

A.8 Dualità

Il legame stretto che esiste tra massimi e minimi vincolati si chiama *dualità*. L'espressione seguente mostra questo legame: consideriamo λ , uno scalare maggiore di zero. Se esiste una soluzione $x^*(z)$ al problema *primale*

$$V(z) = \max_x f(x, z) + \lambda(C(z) - g(x, z)) \quad (\text{A.38})$$

allora $x^*(z)$ risolve anche il problema *duale*

$$C(z) = \min_x g(x, z) + \frac{1}{\lambda}(V(z) - f(x, z)) \quad (\text{A.39})$$

Dimostrazione. È necessario dimostrare che il problema di massimizzazione dell'Equazione A.38 è equivalente al problema di minimizzazione dell'Equazione A.39 quando $\lambda > 0$. Poiché esiste una soluzione $x^*(z)$, esiste la funzione $V(z)$. Sottraendo $V(z)$ da entrambi i membri dell'Equazione A.38 si ottiene

$$0 = \max_x [f(x, z) - V(z)] + \lambda[C(z) - g(x, z)]$$

Sottraendo poi $\lambda C(z)$ da entrambi i membri si ha

$$-\lambda C(z) = \max_x f(x, z) - V(z) - \lambda g(x, z)$$

Moltiplicando entrambi i membri per -1 , l'operatore \max si trasforma nell'operatore \min ,

$$\lambda C(z) = \min_x V(z) - f(x, z) - \lambda g(x, z)$$

e dividendo entrambi i membri per la costante positiva λ si ottiene il risultato nell'Equazione A.39.

Questo risultato implica che quando risolviamo il problema primale di massimizzazione vincolata e il vincolo è *stringente*, allora esiste anche una rappresentazione duale del problema. Per capire il perché, consideriamo il problema vincolato

$$\begin{array}{l} \max_x f(x, z) \\ \text{s.t. } g(x, z) \leq C(z) \end{array}$$

Per esempio, un'impresa potrebbe affrontare questo tipo di problema quando si trova a massimizzare l'output $f(x, z)$ soggetto al vincolo di mantenere i costi $g(x, z)$ al di sotto di un certo livello $C(z)$. La funzione lagrangiana che corrisponde a questo problema è $\mathcal{L}(x, z) = f(x, z) + \lambda(C(z) - g(x, z))$. Il risultato implica che se la scelta ottima di x dato z (che nel nostro esempio massimizza l'output soggetto al vincolo di mantenere i costi al di sotto di un determinato limite) rende il vincolo stringente, allora questa stessa scelta risolve anche il problema *duale* di minimizzare $g(x, z)$ soggetta al vincolo $f(x, z) \geq V(z)$ (oppure nel nostro

esempio a minimizzare i costi con il vincolo di mantenere l'output al di sopra di $V(z)$). Inoltre, il valore del moltiplicatore nel problema duale sarà il reciproco del valore del moltiplicatore nel problema primale.

Questo risultato non dipende dalla derivabilità o dalla forma delle funzioni f e g , ma solo dall'esistenza di una soluzione al problema di massimizzazione primale. Se però la soluzione al problema primale soddisfa le condizioni di primo ordine a esso associate e il vincolo è stringente, allora le stesse condizioni di primo ordine caratterizzeranno il problema duale.