

Prefazione

Questo volume nasce dall'esigenza di un testo in lingua italiana per lo studio qualitativo elementare di equazioni e sistemi differenziali, tipici degli insegnamenti di *Sistemi Dinamici*, *Equazioni Differenziali* e *Metodi e Modelli Matematici per la Biologia*, presenti in molti corsi di laurea in Biologia, Matematica, Matematica Applicata, Ingegneria, Scienze Naturali e Mediche.

Perché nutrire interesse verso gli aspetti qualitativi? Le equazioni differenziali sono usate per descrivere la dinamica di sistemi naturali governati da leggi fisiche. Tuttavia, mentre per i problemi traducibili in equazioni o sistemi lineari esiste una serie di tecniche atte ad esprimere esplicitamente le soluzioni in forma analitica, questo non è possibile, in generale, per i problemi non lineari. Per questi casi si potrebbe ricorrere ad un approccio di tipo numerico-computazionale, che consente di ottenere soluzioni approssimate e di studiarne le relative proprietà. I metodi numerici, tuttavia, risultano piuttosto inefficaci se prima non si riesce a stabilire l'esistenza o la non esistenza di soluzioni e la loro eventuale unicità o molteplicità. Pertanto, questioni quali limitatezza o illimitatezza delle soluzioni, esistenza o non esistenza di orbite periodiche, stabilità o instabilità dei punti di equilibrio, biforcazione del sistema al variare di un parametro, robustezza del sistema in presenza di perturbazioni, sono di primaria importanza e possono essere affrontate tramite l'analisi qualitativa senza ricorrere alla soluzione analitica (che per sistemi non lineari raramente esiste in forma chiusa) e senza simulazione numerica. Inoltre, l'analisi qualitativa delle equazioni differenziali è un argomento tecnicamente accessibile anche agli studenti di primo livello e consente di collegare, combinare ed esercitare nozioni che provengono dall'algebra, dal calcolo differenziale di base e dalla geometria elementare, stimolando notevolmente l'intuizione matematica. Si può affermare che gli aspetti qualitativi costituiscano un background indispensabile per affrontare un'ampia gamma di insegnamenti, anche non direttamente collegati alla teoria delle equazioni differenziali.

L'opera è costituita da un'ampia collezione di problemi svolti che permette sia di acquisire elementi di natura teorica tramite dimostrazioni rigorose, sia di sviluppare l'attitudine a risolvere problemi nuovi utilizzando nozioni note e richiamate all'inizio di ciascun capitolo. Il volume si caratterizza, principalmente, per due aspetti: quello induttivo e quello figurativo. L'approccio induttivo permette al lettore di apprendere le tecniche dell'analisi qualitativa attraverso una serie di problemi proposti in modo graduale e pensati per introdurre, ciascuno, un particolare argomento. L'aspetto figurativo è stato particolarmente curato in quanto l'analisi planare permette, per sua natura, una rappresentazione completa dei ritratti di fase. Il lettore si renderà conto che, anche per problemi non lineari ed apparentemente complessi, lo studio di poche caratteristiche di base mediante strumenti semplici e la successiva ricomposizione del-

le informazioni raccolte in una figura permettono di intuire velocemente l'andamento delle soluzioni. Per questi motivi crediamo che il testo non sia né un libro di teoria in senso classico né uno di esercitazioni, ma si collochi in posizione intermedia tra di essi.

Poiché l'opera concentra l'attenzione sugli aspetti qualitativi dei problemi differenziali ordinari, le tecniche di integrazione esatta non sono trattate e per esse si rimanda il lettore ad altre fonti (si vedano, per esempio, i riferimenti [35, 30, 32, 3]). Per i sistemi dinamici *discreti* segnaliamo il riferimento [36], mentre per quelli *continui* esiste un'ottima letteratura in Inglese (in particolare i classici [5, 17]). Per completezza, in bibliografia sono menzionati altri validi testi dedicati all'analisi qualitativa delle equazioni differenziali, per lo più ordinarie.

Nella *Parte I* ci occupiamo di modelli discreti, ovvero equazioni e sistemi alle differenze, che giocano un ruolo fondamentale in numerosi campi, tra cui la biologia e la fisica, dove i rilevamenti sperimentali di una certa grandezza sono effettuati a tempi discreti. Nel primo capitolo vengono presentati alcuni esempi di equazioni alle differenze ad un passo, mentre nel secondo capitolo consideriamo alcuni sistemi di due equazioni alle differenze in due incognite. In entrambe le situazioni restringiamo l'attenzione al caso non lineare, assumendo che il lettore conosca i metodi risolutivi standard per trattare il caso lineare (si vedano i riferimenti [36, 18]). Particolare attenzione è dedicata alle differenze tra le nozioni di stabilità locale e globale. Il caso scalare discreto consente anche di introdurre sia il concetto di caos tramite un modello classico unidimensionale, molto semplice, e noto come *equazione logistica*, sia la nozione di esponente di Lyapunov. Entrambi questi concetti sono ripresi, in seguito, per i problemi continui.

La *Parte II* del volume, molto più corposa della prima, è dedicata alle equazioni differenziali e ai sistemi di due equazioni. Si è dato particolare risalto al caso non lineare, rimandando ai riferimenti [35, 30, 32, 8] per il background che riguarda il complesso delle tecniche risolutive generali. Dapprima consideriamo alcuni studi qualitativi del problema di Cauchy unidimensionale come propedeutici alla successiva analisi dei sistemi planari non lineari. Vengono inoltre svolti due classici problemi agli autovalori del second'ordine con condizioni al contorno di Dirichlet, Neumann, Robin e periodiche, nonché alcuni problemi di minimo risolti utilizzando le equazioni di Eulero-Lagrange per funzionali unidimensionali. Nel caso vettoriale, dopo la classificazione degli equilibri per i sistemi lineari, consideriamo alcuni problemi dipendenti da un parametro reale mostrando come le caratteristiche di stabilità di un punto di equilibrio possano cambiare sostanzialmente al variare del parametro stesso. Il caso di sistemi non lineari è affrontato sia localmente tramite la linearizzazione del sistema nell'intorno del punto di equilibrio sia globalmente attraverso lo studio delle curve isocline, che permettono di dedurre la direzione delle traiettorie nell'intero piano delle fasi, e sia attraverso l'utilizzo del teorema di Lyapunov o delle coordinate polari, che spesso forniscono informazioni di carattere globale (sul bacino di attrazione di un equilibrio). Dopo una sezione dedicata alle principali proprietà dei sistemi conservativi, gradiente, e Hamiltoniani, viene dato largo spazio all'esistenza di orbite periodiche e di cicli limite (teorema di Poincaré-Bendixon), alla loro non esistenza (criterio di Dulac), nonché ad alcuni esempi che chiariscono i concetti di orbita omoclina ed eteroclina. Tra le varie applicazioni sono considerati, oltre ad esempi classici tratti della fisica (circuiti, pendolo, etc.), modelli di competizione e cooperazione tra

popolazioni tratti dalla biologia. Un ultimo capitolo è dedicato ai fenomeni caotici che possono verificarsi in sistemi continui bidimensionali (nel caso non autonomo) e tridimensionali. Per ulteriori approfondimenti relativi alla seconda parte si rimanda ai riferimenti [5, 17, 3, 7, 9, 14, 15, 16, 19, 20, 24, 11].

I requisiti necessari al lettore per la comprensione di questo testo sono i contenuti standard dei corsi di Analisi Matematica I e II e i rudimenti fondamentali di Algebra Lineare. Mentre è essenziale un solido background di tutta l'Analisi Matematica I, dell'Analisi Matematica II si presuppongono le nozioni base di calcolo differenziale in più variabili, la conoscenza e l'uso dei teoremi di esistenza ed unicità locale e globale per il problema di Cauchy, le varie tecniche risolutive delle equazioni differenziali delle categorie canoniche e i teoremi relativi agli operatori e alle forme differenziali (teorema della divergenza etc.). Come testi di riferimento si vedano [8, 13, 29, 30, 34].

Questa versione dell'opera, essendo la prima, potrebbe contenere alcune imprecisioni. Ce ne scusiamo in anticipo e chiediamo al lettore attento di comunicarcele assieme ad eventuali suggerimenti. A tal fine, abbiamo istituito la pagina dedicata <http://profs.sci.univr.it/~squassina/book>, costantemente aggiornata, in cui possono essere reperiti sia gli *errata corrige* sia le ultime versioni degli scripts per GNU Octave proposti in appendice.

Gli autori desiderano ringraziare vivamente tutti coloro che hanno fornito suggerimenti utili a migliorare la stesura del volume e, in particolare, Alessandro Musesti per il contributo alla sezione 1.5 e Mauro Spera per la nota geometrica nella sezione finale.

Verona, 31 agosto 2008

Marco Squassina
Simone Zuccher